

Bölüm 10: Katı Cismin Sabit bir Eksen Etrafında Dönmesi

Kavrama Soruları

- 1- Bir nokta etrafında dönmekte olan cismin hareketini tanımlamak için nasıl bir yer değiştirme tanımlarsınız?
- 2- Açısal hızın yönü var mıdır, veya açısal hız vektörel bir nicelik mi dir?
- 3- Dönme olayında cismin kütlesini direk olarak kullanabilir miyiz?
- 4- Aynı yükseklikten bırakılan bir cisim kayarak mı yoksa yuvarlanarak mı daha çabuk aşağıya iner?

Konu İçeriği

Sunuş

10-1 Açısal Yer Değiştirme, Hız ve İvme

10-2 Dönme Kinematiği

10-3 Açısal ve Doğrusal Nicelikler

10-4 Dönme Enerjisi

10-5 Tork

10-6 Tork ve Açısal İvme Bağlantısı

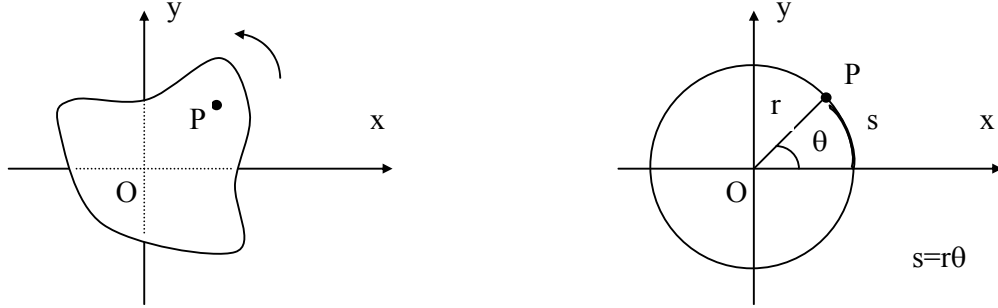
Sunuş

Bu bölümde, önce sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cismin açısal yer değiştirme, açısal hız ve açısal ivme nicelikleri türetilecek ve dönme hareketi ile açısal hareket arasındaki ilişki ve benzerlikler elde edilecektir. Daha sonra dönme hareketi yapan katı bir cismin dönme kinetik enerji ifadesi türetilenektir. Bir kuvvetin bir cismi bir nokta etrafında döndürme etkisinin ifadesi olan tork kavramı tanımlanacak. İki vektörün vektörel çarpımı tanımlanarak tork kavramı kuvvet ve uzunluk vektörleri ile vektörel çarpım olarak ifade edilecektir. Son olarak da bir kuvvetin döndürme etkisi ile açısal ivme arasında nasıl bir ilişki olduğu incelenerek Newton'un 2. kanununun dönü hareketi için ifadesi elde edilecektir.

10.1 Açısal Yer Değiştirme, Hız ve İvme

Dönme olayını inceleyebilmek için öncelikle dönme hareketini en iyi tanımlayacak yerdeğiştirme niceliğini tanımlamamız gerekecektir. Bu yer değiştirmeyi tanımladıktan sonra doğrusal harekette tanımladığımız gibi yer değiştirmenin zamana göre değişimine bakarak bu dönen cismin dönüş hızını (açısal hız), dönüş hızının birim zamandaki değişiminden de dönüş hızındaki değişimleri gösteren dönüş ivmesi (açısal ivme) kavramlarını türetebiliriz.

Aşağıdaki gibi, O noktası etrafında dönebilen herhangi bir şekle sahip katı bir cismi göz önüne alalım. Bu cismin üzerinde tanımladığımız bir P noktasının hareketini inceleyelim.



Sabit O merkezi etrafında r yarıçaplı P noktasının aldığı yol;

$$s=r\theta$$

θ 'nın birimi radyan (rad)'dır. Bir radyan, yarıçapla eşit uzunluktaki bir yay parçasının yarıçapa oranı ile elde edilen açıdır.

$$s=r\cdot\theta(1 \text{ radyan})$$

Radyan açı ölçüsü ile derece açı ölçüsü arasındaki ilişki

$$\theta(\text{rad})=(\pi/180^\circ).\theta(\text{derece})$$

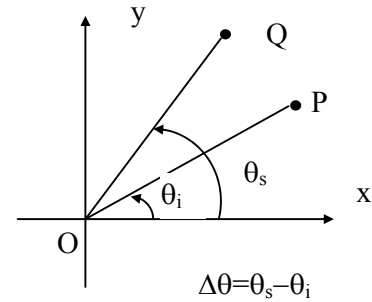
Açısal Yer Değiştirme:

r yarıçaplı P noktasının Δt zaman sonra Q noktasına geldiğini düşünürsek P noktasının açısal yer değiştirmesi:

$$\Delta\theta=\theta_s-\theta_i$$

şeklinde yazılır.

Açısal yer değiştirmenin boyutu yoktur!, birimi ise radyandır!



Ortalama Açısal Hız ($\bar{\omega}$):

Ortalama açısal hız ($\bar{\omega}$), Δt zaman aralığındaki açısal yer değiştirmenin ($\Delta\theta$), Δt zamanına oranıdır.

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_s - \theta_i}{\Delta t}$$

Ani Açısal hız (ω):

Ani açısal hız (ω), Δt zamanı limit durumunda sıfıra gittiğinde ($\Delta t \rightarrow 0$) açısal yer değiştirmenin ($\Delta\theta$), zamana oranıdır.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

θ açısı boyutsuz olduğundan açısal hızın boyutu $[\omega]=1/[T]$ 'dir. Birimi ise radyan/saniye (rad/s) veya s^{-1} dir. Açısal hız vektörel bir nicelikdir öyle ki yönü aşağıdaki gibi belirlenir.

Açısal hızın yönü:

Dönme açısı artarsa (saat ibresinin tersi yönündeki hareket) ω pozitif
Dönme açısı artarsa (saat ibresi ile aynı yöndeki hareket) ω negatiftir.

Ortalama açısal ivme ($\bar{\alpha}$):

Ortalama açısal ivme ($\bar{\alpha}$), Δt zaman aralığındaki açısal hızdaki değişme miktarının ($\Delta\omega$) geçen zamana oranıdır.

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_s - \omega_i}{\Delta t}$$

Ani açısal ivme (α):

Ani açısal ivme (α), Δt zaman aralığı limit durumunda sıfıra gittiğinde ($\Delta t \rightarrow 0$) açısal hızın ($\Delta\omega$) zamana oranıdır.

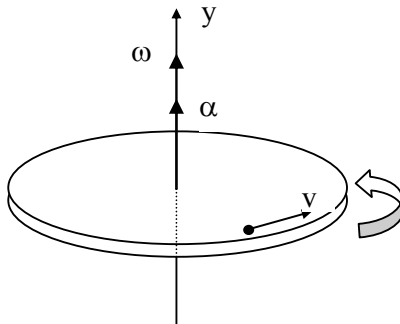
$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

θ açısı boyutsuz olduğundan açısal ivmenin boyutu $[\alpha]=1/[T^2]$ 'dir. Birimi ise radyan/saniye² (rad/s²) veya s^{-2} dir.

Açısal ivmenin yönü:

Dönme açısı artarsa (saat ibresinin tersi yönündeki hareket) α pozitif
Dönme açısı artarsa (saat ibresi ile aynı yönündeki hareket) α negatiftir.

v, ω ve α 'nın yönleri:



v çizgisel hız yörüngeye teğettir.

ω dönme eksenini üzerindedir

Saat yönünün tersi yönde ise ω , $+y$;

Saat yönünü ile aynı yönde ise ω , $-y$;

α (açısal ivme), ω ile aynı yönlüdür.

Açısal hız vektörünün yönünü belirlemek için “sağ el kuralı”: Açısal hızın yönünü bulmak için sağ elimizi kullanarak açısal hızın yönünü kolayca bulabiliriz. Bu kuralda sağ elin baş parmak dışındaki dört parmağı birleştirilip kıvrılarak dönen cismin dönüş yönü ile karşılaştırılır. Baş parmak bu dört parmağa dik tutulur ve baş parmağın gösterdiği yön açısal hızın yönünüdür.

Doğrusal ve açısal hareketi tanımlamada kullanılan nicelikleri karşılıklı olarak yazarsak:

<u>Açısal</u>	<u>Doğrusal</u>
θ	x (yerdeğiştirme)
ω	v (hız)
α	a (ivme)

10-2 Dönme Kinematigi: Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi

Daha önce doğrusal hareket için türettiğimiz kinematik eşitlikleri dönme hareketine uyarlayabiliriz. Doğrusal harekette türettiğimiz formüllere dönme hareketini tanımlayan x, v ve a yerine açısal yerdeğiştirme($\Delta\theta$), açısal hız(ω) ve açısal ivme(α) niceliklerini yazarsak:

Sabit ivmeli doğrusal hareket

$$v_s = v_o + at$$

$$x_s = x_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_s^2 = v_o^2 + 2ax$$

Sabit açısal ivmeli dönme hareketi

$$\omega_s = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta_s = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

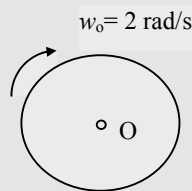
$$\omega_s^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$$

elde ederiz..

Örnek 10.1 *Dönen Teker:* Bir tekerlek, 3,5 rad/s²'lik sabit açısal ivme ile dönüyor. t=0 s'de tekerleğin açısal hızı 2 rad/s ise;

- 2 saniyede teker ne kadarlık açı süpürür?
- t=2 s sonra açısal hızı nedir?

Çözüm:



$$\begin{aligned} \text{a) } \theta_s &= \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= (2 \text{ rad/s}) \cdot (2 \text{ s}) + \frac{1}{2} (3,5 \text{ rad/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 = 11 \text{ rad} = 630^\circ \\ \text{Devir sayısı} &= \Delta\theta / 360^\circ \text{ (derece/dev)} = 1,75 \text{ devir} \\ \text{b) } \omega_s &= \omega_o + \alpha t \\ &= (2 \text{ rad/s}) + (3,5 \text{ rad/s}^2) \cdot (2 \text{ s}) = 9 \text{ rad/s bulunur..} \end{aligned}$$

10-3 Açısal ve Doğrusal Nicelikler

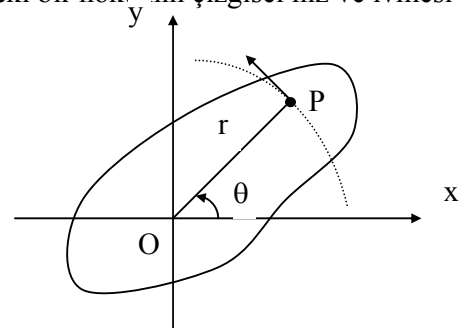
Dönen bir cismin açısal hız ve ivmesi ile cismin üzerindeki bir noktanın çizgisel hız ve ivmesi arasında nasıl bir bağlantı vardır?

$$s=r\theta \quad r=\text{sabit}$$

$$\text{Teğetsel hız: } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$v=r\omega$$

$$\text{Teğetsel ivme: } a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$



Daha önce dairesel yörüngede dönen bir noktanın merkeze yönelik v^2/r büyüklüğünde $\mathbf{a}_r$ merkezci ivme ile hareket ettiğini görmüştük. $\mathbf{a}_r$ ivmesini ω açısal hız cinsinden yazarsak:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

Dönen bir katı cisim üzerinde hareket eden bir noktanın toplam ivmesi:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$$

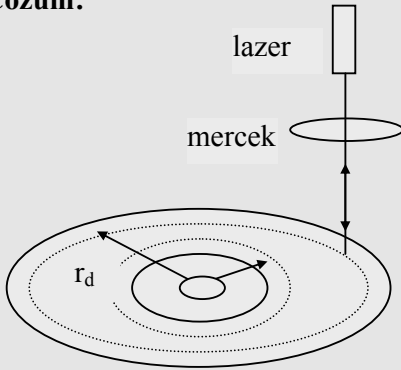
Bu ivmenin büyüklüğü: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Örnek 10.2 *CD Çalar:* Tipik bir CD plağında disk saatin tersi yönünde döner ve lazer-mercek sistemi noktasında yüzeyin sabit hızı 1,3 m/s dir. CD'nin iç yarıçapı $r_i=23$ mm ve dış yarıçap $r_d=58$ mm'dir.

- Disk'in açısal hızını devir başına dakika olarak iç ve dış noktada bulunuz.
- Standart bir CD'nin maksimum çalma süresi 74 dakika 33 saniyedir. Bu sürede disk kaç devir yapar?

Çözüm:



a) En içteki iz için açısal hız

$$\omega_i = \frac{v}{r_i} = \frac{1,3 \text{ m/s}}{2,3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 56,5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_i = (56,5 \text{ rad/s}) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \text{ dev/rad}\right) \cdot (60 \text{ s/dak})$$

$$= 5,4 \times 10^2 \text{ devir/dak}$$

En dıştaki iz için açısal hız

$$\omega_d = \frac{v}{r_d} = \frac{1,3 \text{ m/s}}{5,8 \times 10^{-2} \text{ m}} = 22,4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = 2,1 \times 10^2 \text{ devir/dakika}$$

b) $t = (74 \text{ dak}) \cdot (60 \text{ s/dak}) + 33 \text{ s} = 4473$ saniye

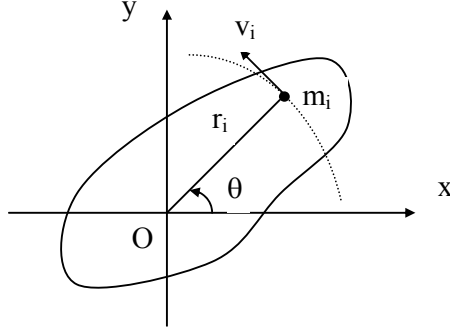
İlk açısal konum $\theta_i = 0^\circ$, $\theta_s = ?$

Ortalama açısal hız $= (\omega_i + \omega_s)/2$

$$\theta_s = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_s)t = 0 + (540 \text{ dev/dak} + 210 \text{ dev/dak}) \cdot (1760 \text{ dak/s}) \cdot (4473 \text{ s}) = 2,8 \times 10^4 \text{ devir bulunur}$$

10-4 Dönme Enerjisi

O eksen etrafında dönen katı cismin kinetik enerjisini bulmaya çalışalım. Katı cismin m_i gibi küçük parçacıklardan oluştuğunu ve O eksen etrafında sabit ω açısal hızı ile döndüğünü kabul edelim.



m_i . parçacığın teğetsel hızı v_i ise kinetik enerjisi K_i

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Toplam kinetik enerji K_T

$$K_T = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$$

ω_i her nokta için aynı olduğundan

$$K_T = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$$

$$K_T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$I = \sum m_i r_i^2$ ifadesine dönme eylemsizlik momenti denir.

Dönme eylemsizlik momenti I , doğrusal hareketteki m kütesine özdeştir.

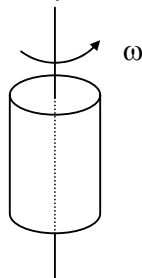
Dönme

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

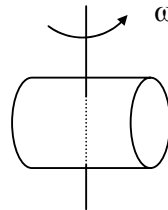
Doğrusal Hareket

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

I eylemsizlik momenti, cismin hangi eksen etrafında döndürüldüğüne bağlıdır.



$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

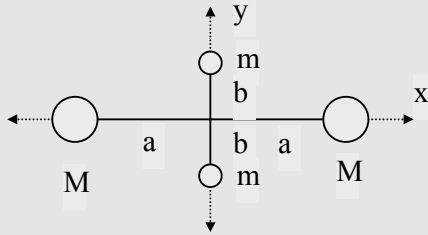


$$I = M R^2$$

Örnek 10.4 *Dönen Dörtlü Parçacık:* Dört küçük küresel kütle, xy düzleminde kütlesi ihmal edilebilen bir çerçevenin köşelerine yerleştirilmiştir. Kürelerin yarıçaplarının çerçevenin boyutlarına kıyasla çok küçük olduğu varsayılıyor.

- Sistem, ω açısal hızı ile y eksenini etrafında dönerse bu eksene göre eylemsizlik momentini ve dönme kinetik enerjisini bulunuz.
- Sistemin O'dan geçen bir eksen (z-ekseni) etrafında xy düzleminde döndüğünü varsayalım. Z eksenine göre eylemsizlik momentini ve dönme kinetik enerjisini bulunuz.

Çözüm:



$$a) \quad I_y = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K_{Dy} = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$

b)

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_{Dz} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

$$K_{Dz} = K_{Dy} + K_{Dx}$$

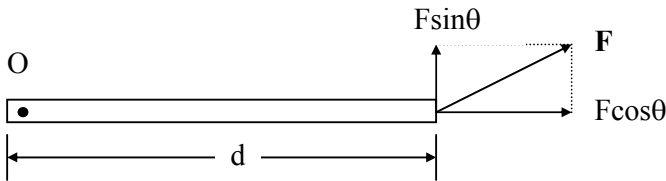
10-6 Tork

Bir F kuvvetinin bir cismi bir eksen etrafında döndürme etkisi tork (τ) denilen bir nicelik ile ifade edilir. Kuvvet ile kuvvetin uygulandığı nokta ile dönme eksenini arasındaki uzaklık yani kuvvet kolu arasındaki açı dik ise tork

Tork=(kuvvet)x(kuvvetin uygulandığı nokta ile dönme eksenini arası uzaklık, kuvvet kolu)

$$\tau = Fd$$

şeklinde tanımlanır. Eğer uygulanan kuvvet ile kuvvet kolu arasındaki açı 90° den farklı ise:



$F\cos\theta$: dönme hareketine katkıda bulunmaz

$F\sin\theta$: dönme hareketini sağlar

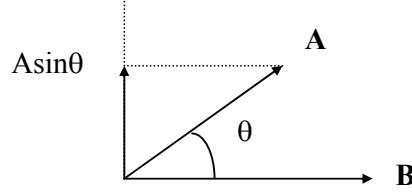
$$\tau = F\sin\theta \cdot d$$

şeklinde yazılır.

İki vektörün Vektörel Çarpımı:

İki vektörün vektörel çarpımın sonucu yine bir vektörel nicelik. Dolayısı ile sonuç vektörün hem büyüklüğü hemde bir yönü olacak.

Elimizde aralarındaki açı θ olan **A** ve **B** gibi iki vektör olsun.



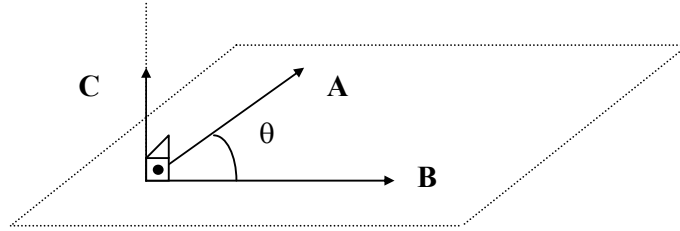
Bu iki vektörün vektörel çarpımı **C** gibi bir vektör verecektir.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

C vektörel olduğundan:

C vektörünün büyüklüğü, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot \sin \theta$

C vektörünün yönü ise, **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir.



Eğer **A** ve **B** vektörleri üç boyutta birim vektörler cinsinden tanımlanmış ise;

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Bu iki vektörün vektörel çarpımının ne olacağını bulmaya çalışırsak:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k}) \end{aligned}$$

Birim vektörlerin (**i**, **j** ve **k**) vektörel çarpımlarına bakacak olursak:

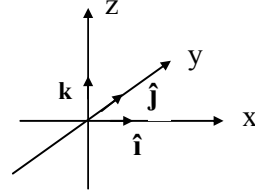
$$\hat{j} \times \hat{j} = \hat{i} \times \hat{i} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \text{ (Aynı birim vektörler arasındaki açı } \theta = 0^\circ \text{ olduğundan } \sin(0^\circ) = 0)$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = 0 + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + 0 + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$ bulunur.

Vektörel çarpım notasyonunu kullanarak tork ifadesini, $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{d}$ vektörlerin vektörel çarpımı olarak ifade edebiliriz.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \times \mathbf{d}$$

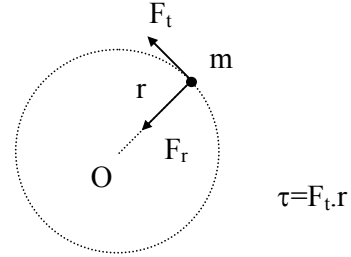
10-7 Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağntı

Teğetsel kuvvet $\mathbf{F}_t$, teğetsel ivmeyi ($\mathbf{a}_t$) oluşturur.

$$\mathbf{F}_t = m \mathbf{a}_t$$

F_t kuvvetinin dairenin merkezine göre uyguladığı tork ($\theta = 90^\circ$)

$$\tau = F_t \cdot r = m a_t r$$



Teğetsel ivme açısal ivmeye $a_t = r\alpha$ eşitliği ile bağlı olduğundan;

$$\tau = (mr\alpha) \cdot r = mr^2 \alpha$$

$I = mr^2$ olduğu hatırlanırsa, burdan

$$\tau = I \alpha$$

Bulunur. Bu eşitlik, Newton'un doğrusal hareket için türettiğimiz $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ hareket kanununa benzemektedir.

Doğrusal

m

a

F

Dönme

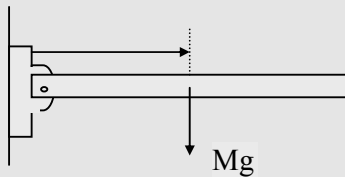
I

α

τ

Örnek 10.10 Dönen Çubuk: Uzunluğu L, kütlesi M olan düzgün bir çubuk, şelildeki gibi bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecek durumdadır. Çubuk yatay durumda iken serbest bırakılıyor. Çubuğun ilk açısal ivmesi ve sağ ucunun ilk çizgisel ivmesi nedir?

Çözüm:



$$\tau = F \cdot d$$

$$\tau = Mg(L/2)$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(\frac{L}{2})}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Bölüm 10'un sonu