

Fizik 101-Fizik I

2008-2009 /I

Yuvarlanma Hareketi ve Açısal Momentum

Nurdan Demirci Sankır

Ofis: 364, Tel: 2924331

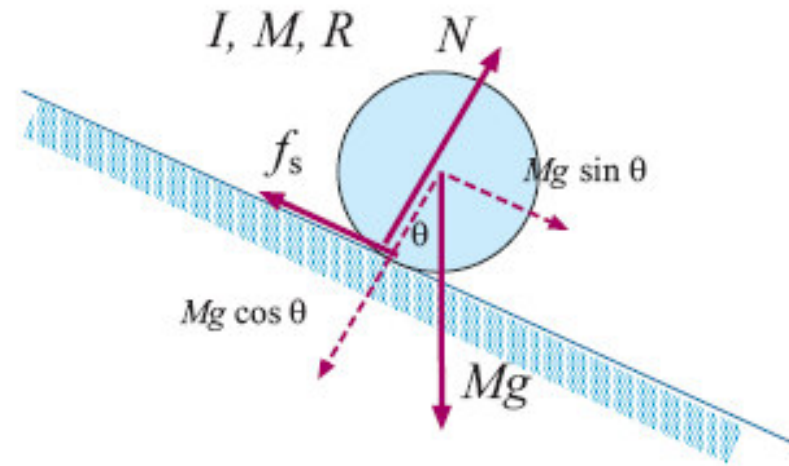
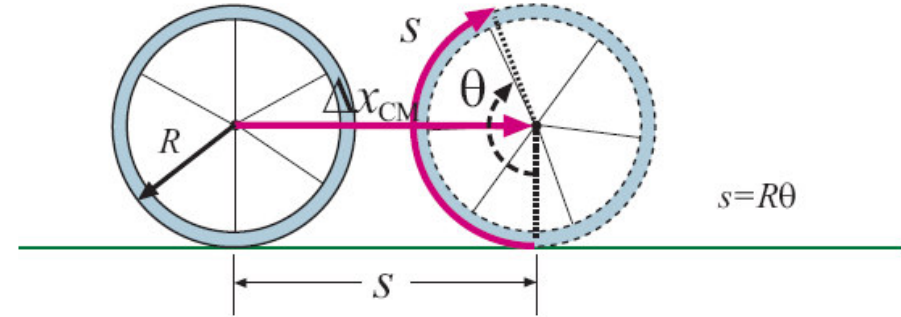


İçerik

- Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi
- Vektörel Çarpım ve Tork
- Bir Parçacığın Açısal Momentumu
- Dönen Katı Cismin Açısal Momentumu
- Açısal Momentumun Korunumu

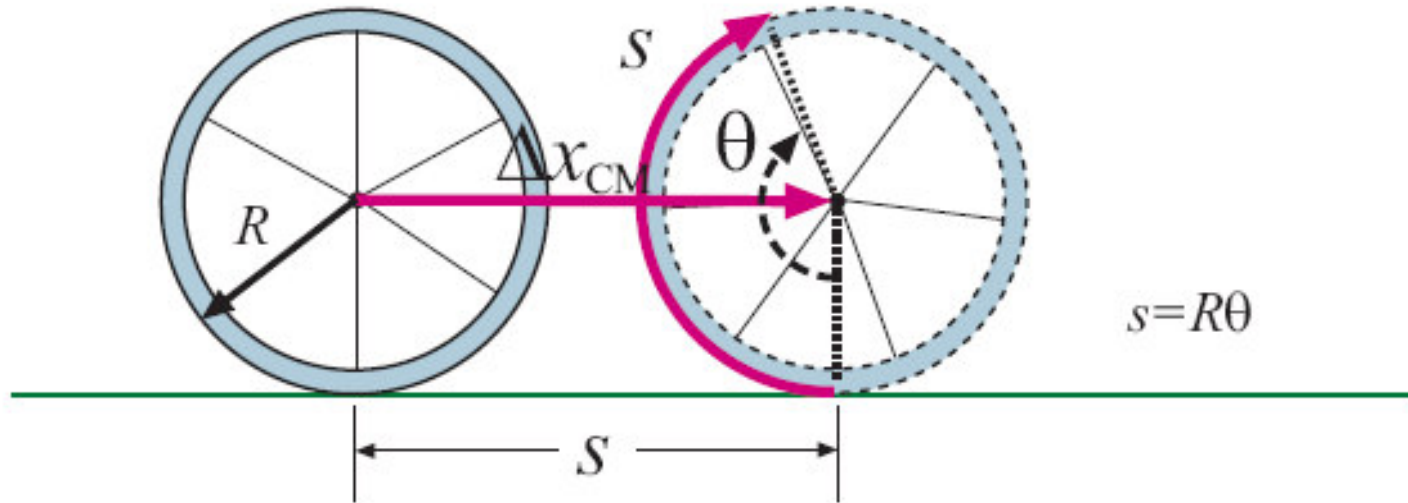


- Yuvarlanma hareketi, dönme ekseninin uzayda sabit olmadığı dönme hareketidir.
- Eğer cismin üzerine etki eden dış torklar yoksa, katı bir cismin açısal momentumu her zaman korunur.
- Doğrusal momentumun korunumu yasası gibi, açısal momentumun korunum yasası da relativistik (görelî) ve kuantum mekaniksel sistemlerde aynı derecede geçerli olan temel bir fizik yasasıdır.



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

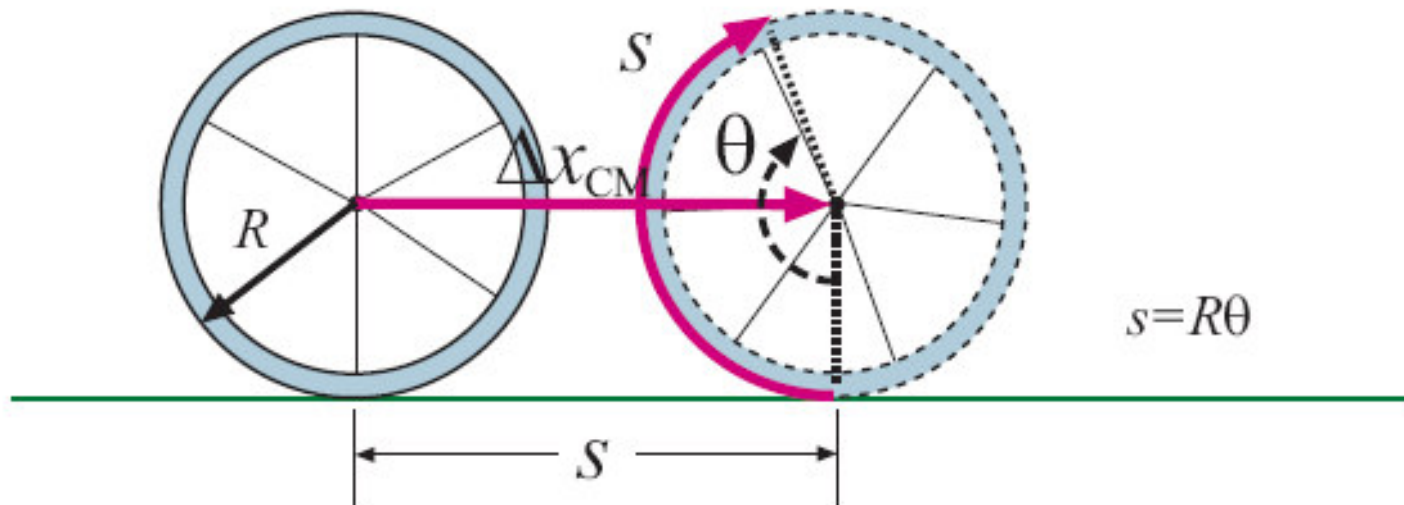
- Hareketli bir eksen etrafında dönen silindir, küre, halka gibi yüksek simetrikli katı bir cismin hareketli bir eksen etrafında dönme hareketini inceleyelim;



- Cismin düzgün bir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanma, yani saf yuvarlanma hareketi yaptığını düşünelim



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi



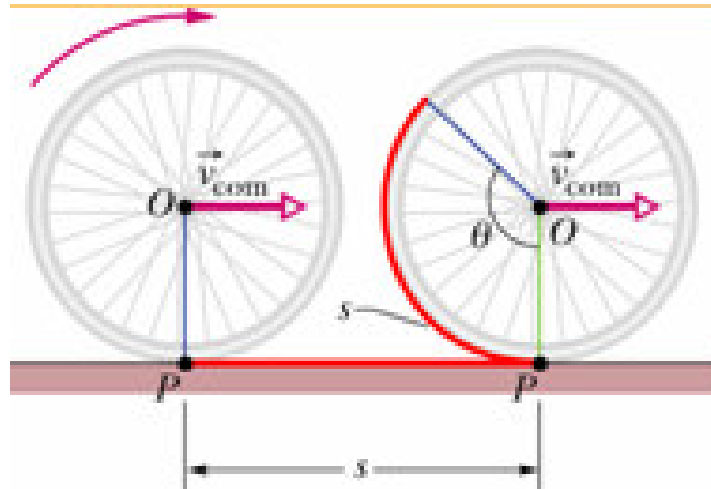
$$\Delta x_{CM} = s = R\theta \quad v_{CM} = \frac{dx_{CM}}{dt}$$



$$a_{CM} = R\alpha \quad v_{CM} = R\omega$$



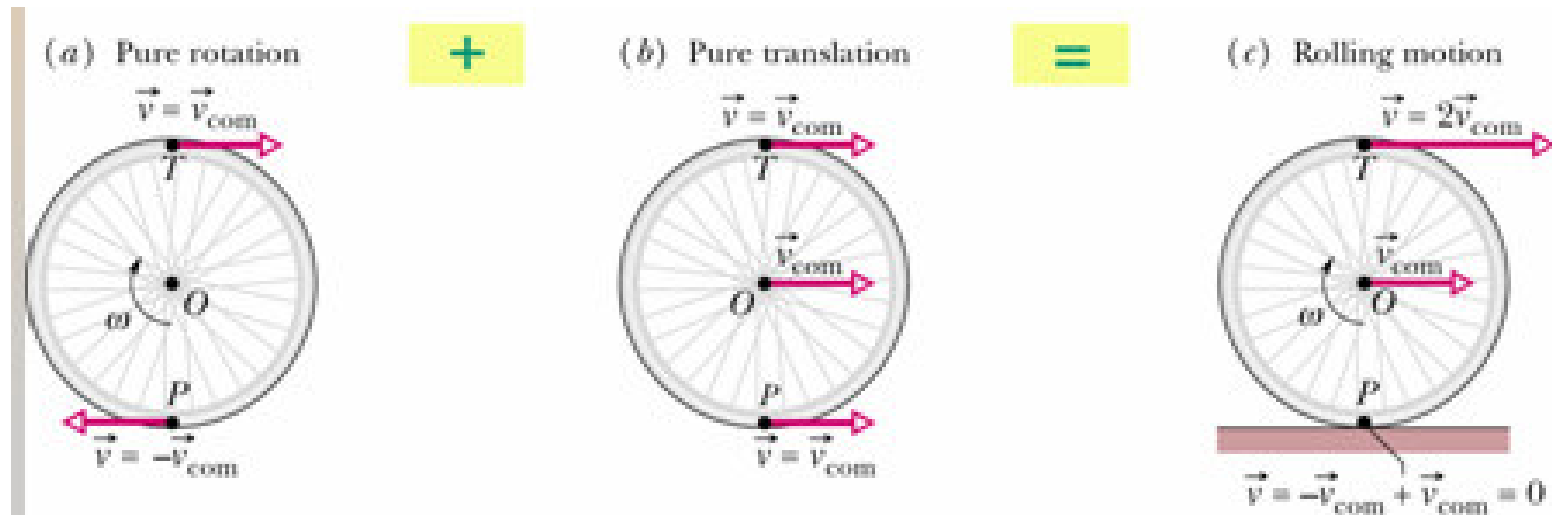
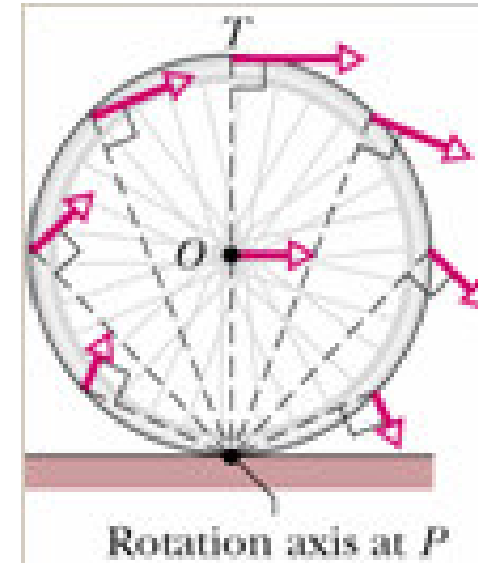
Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi



Saf Dönme Hareketi

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

Dönme + Ötelenme Hareketi



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{\text{com}} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{com}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

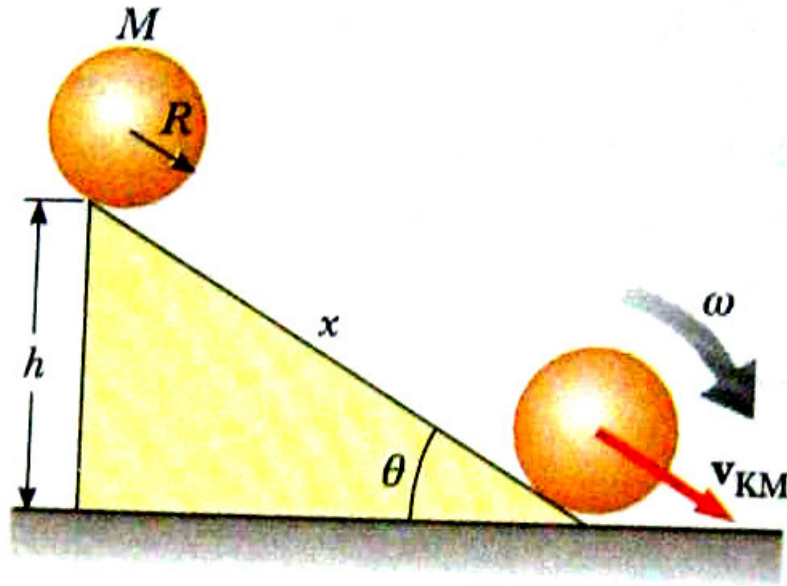
$$K = \frac{1}{2} I_{\text{com}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{com}}^2$$

Kinetik Enerji

Yuvarlanan bir cisim iki tip kinetik enerjiye sahiptir: Bir eksen etrafında dönme kinetik enerjisi ve kütle merkezinin ötelenmesinden kaynaklanan kinetik enerji.



Eğik Düzlemde Yuvarlanan Küre



$$v_{KM} = R\omega$$

$$K = \frac{1}{2} I_{KM} \left(\frac{v_{KM}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_{KM}^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{KM}}{R^2} + M \right) v_{KM}^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{I_{KM}}{R^2} + M \right) v_{KM}^2 = Mgh$$

$$v_{KM} = \left(\frac{2gh}{1 + I_{KM} / MR^2} \right)^{1/2}$$



Eğik Düzlemde Yuvarlanan Küre

Küre eğik düzlemin tepesinde $U=Mgh$ potansiyel enerjisi ve $K=0$ kinetik enerjisi ile hareket etmeye başlar.

Düzgün bir katı küre için eylemsizlik momenti; $I = \frac{2}{5}MR^2$

$$\Rightarrow v_{KM} = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{2/5MR^2}{MR^2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh \right)^{1/2}$$

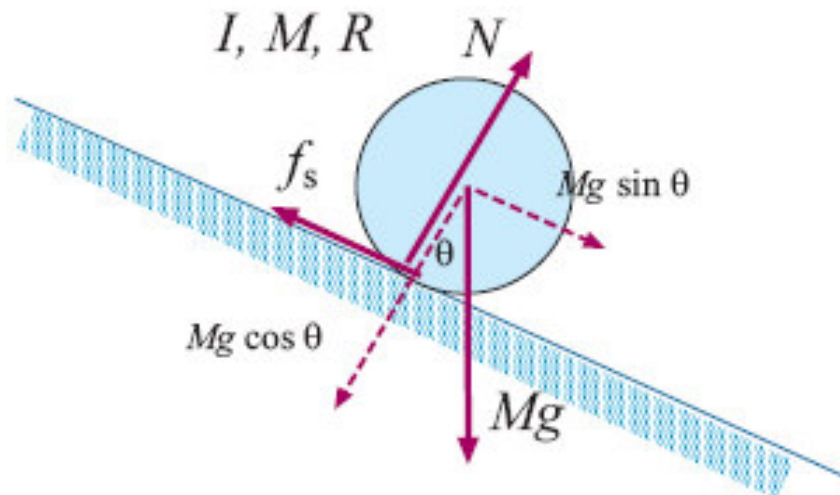
Eğik düzlem doğrultusundaki x yerdeğiştirmesi $h=x\sin\theta$ ile bağlantılıdır.

$$\Rightarrow v_{KM}^2 = \frac{10}{7}gx\sin\theta$$

$v_{KM}^2 = 2a_{KM}x$ olduğunu bildiğimize göre $a_{KM} = \frac{5}{7}g\sin\theta$ bulunur.



Eğik Düzlemde Yuvarlanan Küre



$$Mg \sin \theta - f_s = Ma_{CM}$$

$$\tau = Rf_s \sin 90^\circ = Rf_s$$

$$\tau = Rf_s = I\alpha$$

$$a_{CM} = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a_{CM}}{R}$$

$$Rf_s = \frac{Ia_{CM}}{R} \quad \Rightarrow \quad f_s = \frac{Ia_{CM}}{R^2}$$

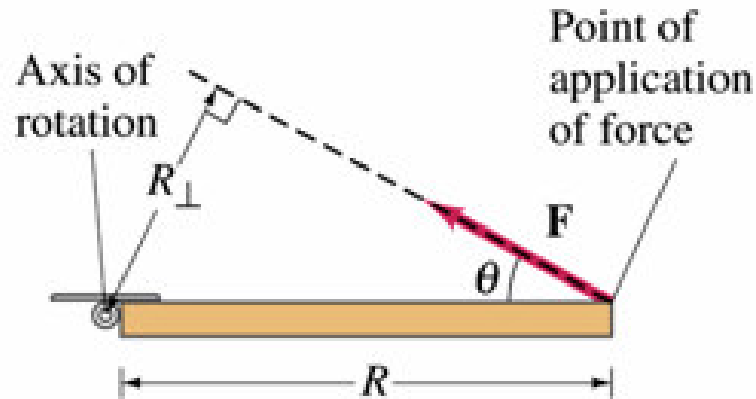
$$Mg \sin \theta - \frac{Ia_{CM}}{R^2} = Ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

$$a_{KM} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$



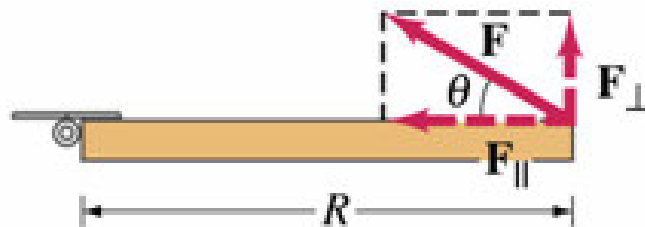
Vektörel Çarpım ve Tork



(a)

$$\tau = R_{\perp} F$$

$$\tau = R F_{\perp}$$



(b)

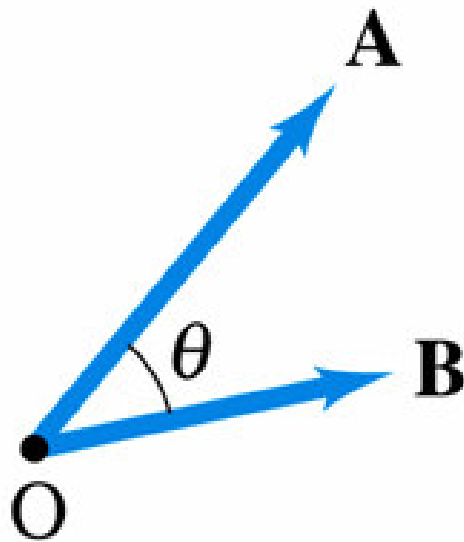
$$\tau = R F \sin \theta$$



$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$



Vektörel Çarpım



$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

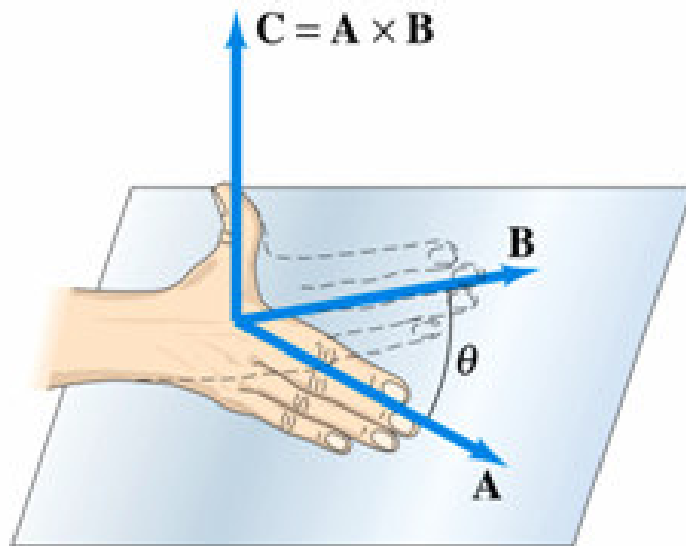
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



Sağ El Kuralı



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



Vektörel Çarpımın Özellikleri

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2. Eğer $\vec{A}$, $\vec{B}$ 'ye paralelse $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ ve $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

3. $\vec{A}$ vektörü $\vec{B}$ vektörüne dikse $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ olur.

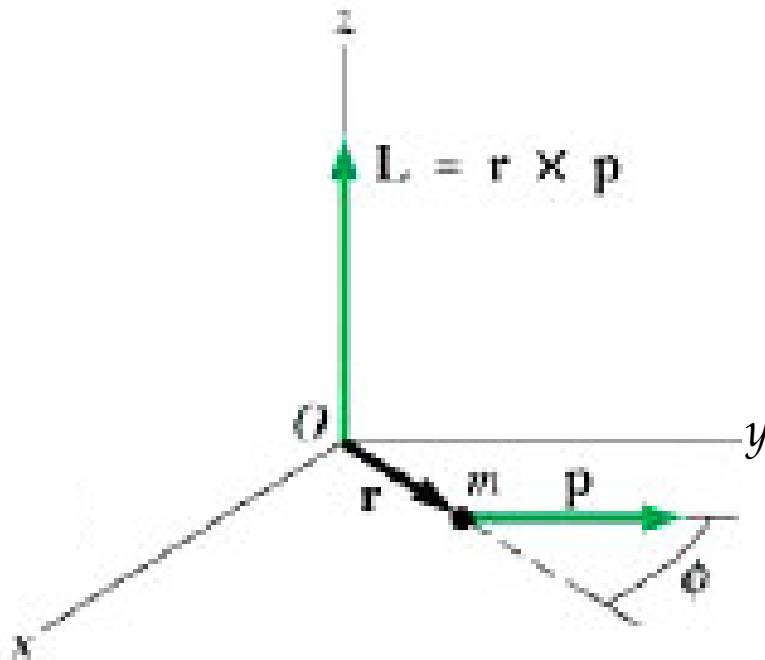
4. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

5. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}$



Bir Parçacığın Açısal Momentumu

O koordinat başlangıcına göre, bir parçacığın L açısal momentumu, o andaki r konum vektörü ile p doğrusal momentumunun vektörel çarpımı olarak tanımlanır.



$$L = r \times p$$

$$\text{Magnitude of } L = pr \sin \phi = mvr \sin \phi$$



Bir Parçacığın Açısal Momentumu

Doğrusal Hareket

Dönme Hareketi

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bir parçacığa etki eden net tork, parçacığın açısal momentumunun zamana göre değişimine eşittir.



Parçacık Sisteminin Açısal Momentumu

Bir parçacıklar sisteminin verilen bir noktaya göre $\vec{L}$ toplam açısal momentumu, parçacıkların her birine ait açısal momentumların vektörel toplamı olarak tanımlanır:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_i \vec{L}_i$$

Eylemsiz bir referans sisteminde, verilen bir orijine göre sistemin toplam açısal momentumunun zamana göre değişimi, o orijine göre sistem üzerine etli eden net dış torka eşittir.

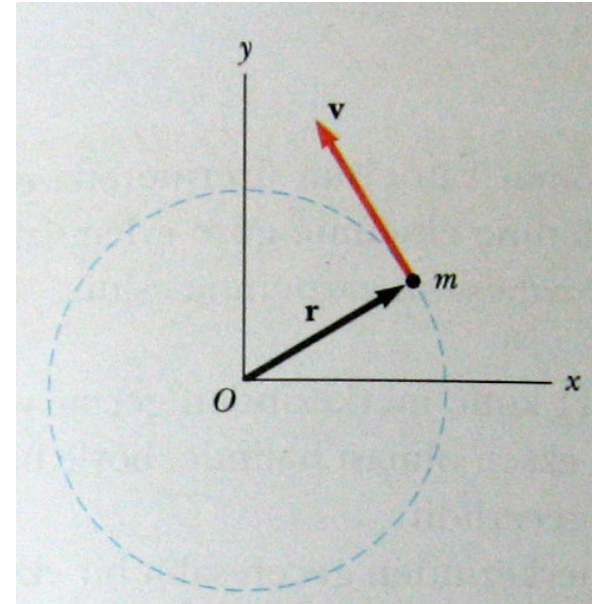
$$\sum \tau_{\text{dış}} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



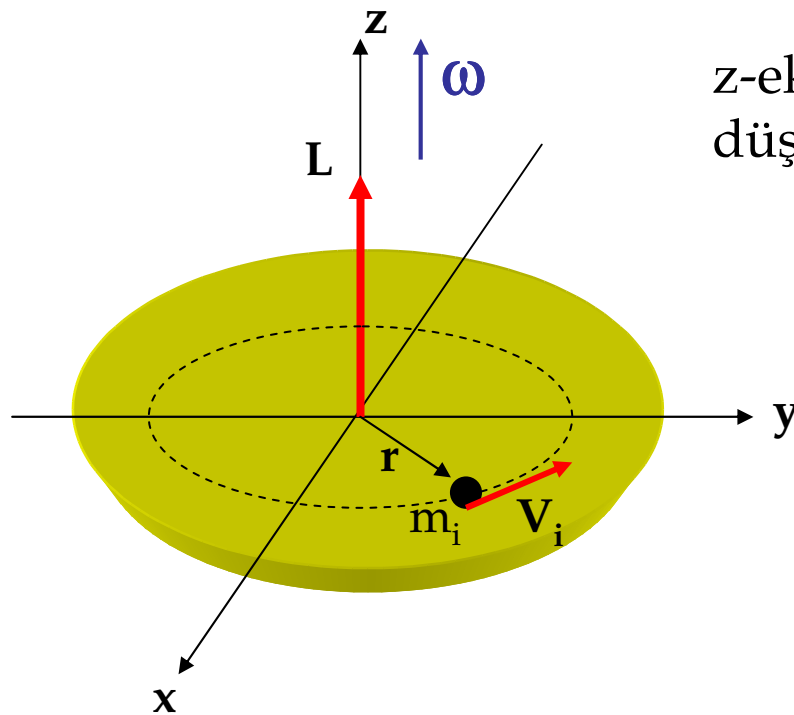
Örnek

Dairesel Hareket

Bir parçacık Şekilde görüldüğü gibi xy -düzleminde r yarıçaplı bir çember üzerinde hareket etmektedir. a) Doğrusal hızı V olduğunda, O noktasına göre, cismin açısal momentumunun büyüklüğünü ve doğrultusunu bulunuz, b) L' 'nin büyüklüğünü ve doğrultusunu parçacığın açısal hızı cinsinden bulunuz.



Dönen Katı Bir Cismin Açısal Momentumu



z-ekseni etrafında dönen katı bir cisim düşünelim;

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$L_z = I \omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha$$

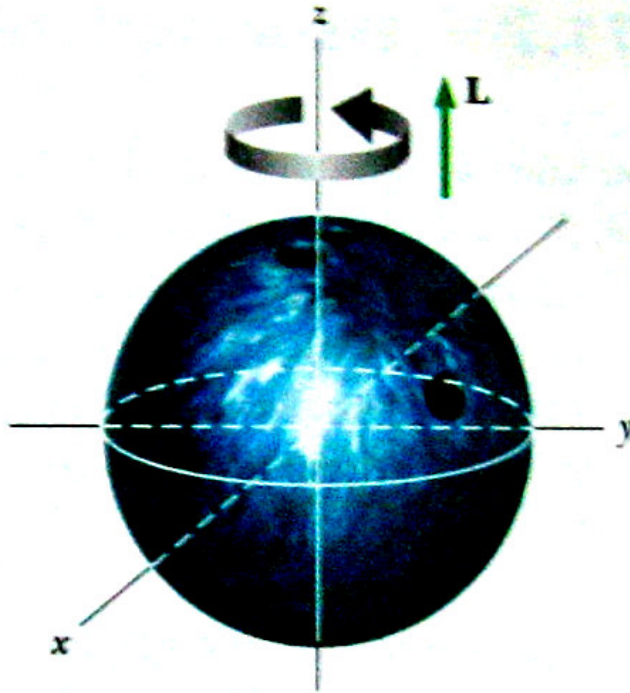
$$\sum \tau_{\text{dış}} = \frac{dL_z}{dt} = I \alpha$$



Örnek

Bovling Topu

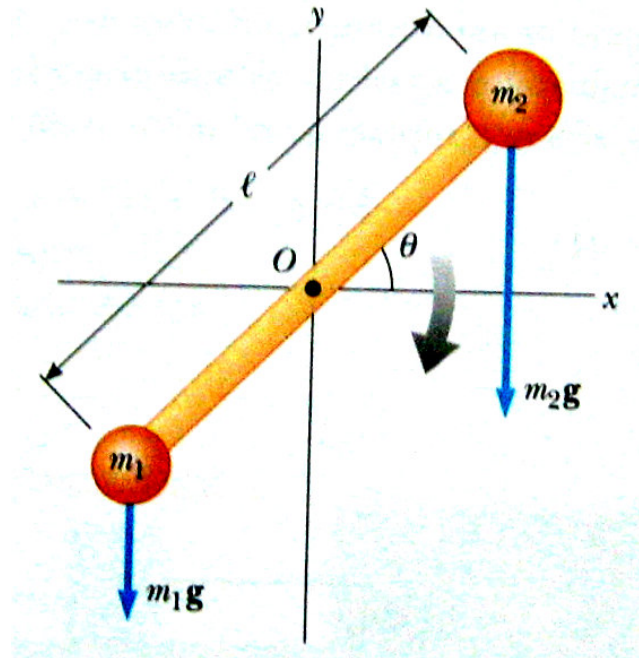
Şekilde görüldüğü gibi bir bovling topu 10 devir/s'lik hızla döndüğüne göre açısal momentumunun büyüklüğünü bulunuz.



Örnek

Dönen Çubuk

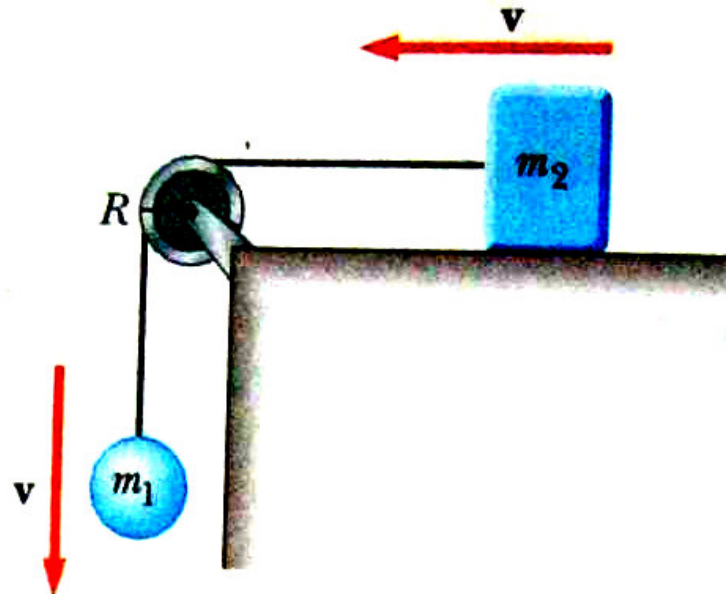
M kütleli l uzunluklu katı bir çubuk, merkezinden geçen sürtünmesiz bir mile tutturulmuştur. Bu çubuğun uçlarında m_1 ve m_2 kütleli iki parçacık bulunmaktadır. Sistem düşey bir düzlem içinde ω açısal hızıyla dönmektedir. a) Sistemin açısal momentumunun büyüklüğünü bulunuz, b) Çubuk yatayla θ açısı yaptığında, sistemin açısal ivmesinin büyüklüğünü bulunuz.



Örnek

Birbirine bağlı iki kütle

m_1 kütleli bir kütle ile m_2 kütleli bir blok şeklde görüldüğü gibi, R yarıçaplı bir makaradan geçen ince bir ip ile birbirine bağlıdır. Makaranın, kendi eksenine göre eylemsizlik momenti I dır. Blok, sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde kaymaktadır. Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak, bu iki cismin doğrusal ivmesi için bir ifade elde ediniz.



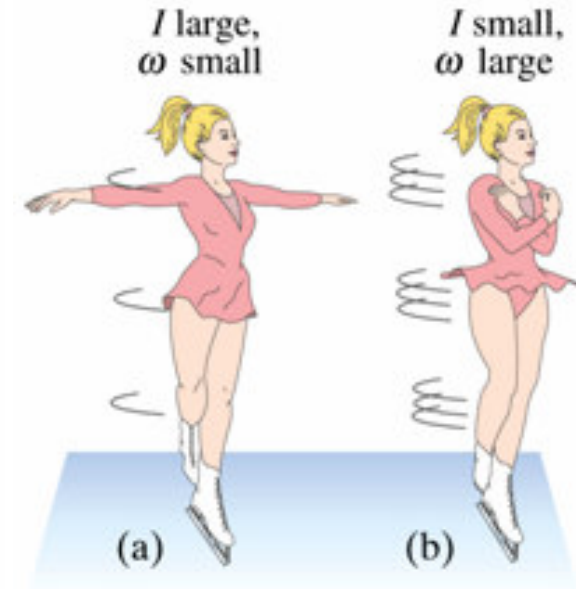
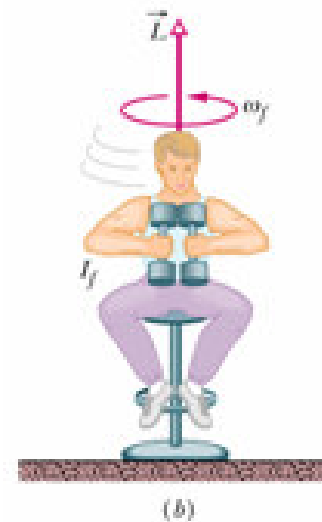
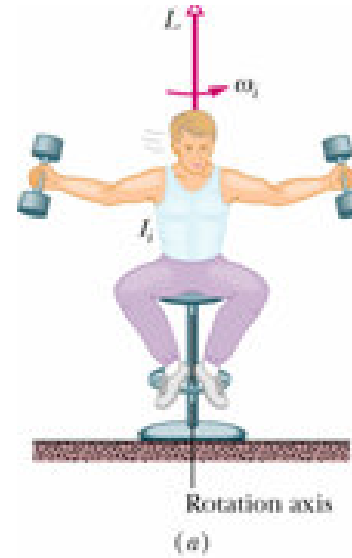
Açısal Momentumun Korunumu

Sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cismin açısal momentumu;

$$L = I\omega$$

Eğer bir sisteme etki eden bileşke dış tork sıfırsa, sistemin toplam açısal momentumunun büyüklüğü ve doğrultusu sabittir.

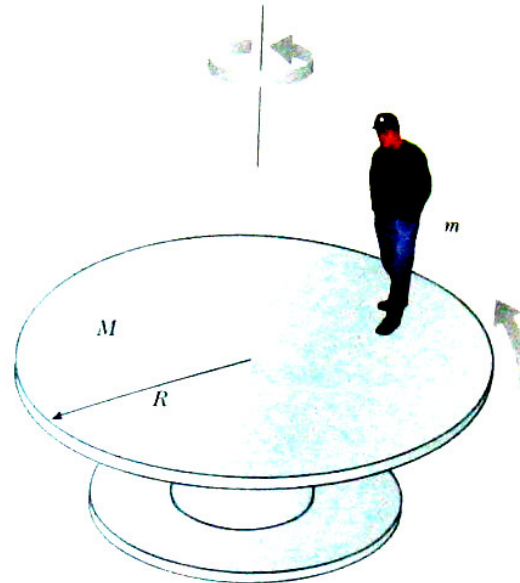
$$\vec{L} = \text{const.} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$



Örnek

Atlı Karınca

Dairesel disk şeklinde yatay bir tabla, sürtünmesiz, düşey bir mil etrafında yatay düzlemde dönmektedir. Tabla $M=100$ kg'lık bir kütleye ve $R=2$ m lik yarıçapa sahiptir. $m=60$ kg kütleli bir öğrenci, dönen tablanın kenarından merkezine doğru yavaşça yürümektedir. Öğrenci, dönen tablanın kenarındayken sistemin açısal hızı 2 rad/s ise, öğrencinin merkezden $r=0,5$ m uzaklıktaki bir noktaya ulaştığındaki açısal hızı ne olur?



Örnek

Dönen Bisiklet Tekerleği

Bir taburede oturan bir öğrenci dönen bisiklet tekerleğini milinden tutmaktadır. Başlangıçta öğrenci ve tabure hareketsiz olduğu halde, tekerlek, yukarıya doğru yönelmiş bir L_i başlangıç açısal momentumuyla dönmektedir. Tekerlek, kendi merkezi etrafında alt üst denilecek şekilde 180° döndürülürse, öğrenci ve tabure dönmeye başlar. L_i cinsinden, öğrenci ve tabureden oluşan sistemin L Açısal momentumunun büyüklüğü ve doğrultusunu bulunuz.



Örnek

Disk ve Çubuk

3 m/s'lik hızla yol alan 2 kg kütleli bir disk, Şekilde görüldüğü gibi hemen hemen sürtünmesiz buz üzerinde duran 1 kg kütleli bir çubuğa çarpıyor. Çarpışmayı esnek kabul ediyoruz. Diskin öteleme hızını, çubuğun öteleme hızını ve çubuğun çarpışmadan sonraki dönme hızını bulunuz. Çubuğun kendi kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $1,33 \text{ kg.m}^2$ dir.

