

Bölüm 6: Dairesel Hareket

Kavrama Soruları

- 1- Bir cismin sürati değişmiyor ise hızındaki değişmeden bahsedilebilir mi?
- 2- Hızı değişen bir cismin sürati değişir mi?
- 3- Düzgün dairesel harekette cismin hızı değişir mi?
- 4- Düzgün dairesel harekette cismin sürati değişir mi?
- 5- Merkezci kuvvet mi yoksa merkezkaç kuvvet mi gerçek bir kuvvettir?
- 6- Yalancı (sözde) kuvvetlerin kaynağı nedir?

Konu İçeriği

Sunuş

6-1 Düzgün Dairesel Hareket

6-2 Düzgün Olmayan Dairesel Hareket

6-3 Newton'un 2. Yasasının Düzgün Dairesel Harekete Uygulanması

Sunuş

Bu bölümde, sabit bir eksen etrafında dönü hareketi yapan bir cismin hareketi incelenecektir. Öncelikle düzgün dairesel hareket yapan bir cismin ivmesi türetilecek daha sonrada en genel dairesel hareket yapan (düzgün olmayan dairesel hareket) cismin ivme ifadesi elde edilecektir. Newton'un 2. yasaının düzgün ve düzgün olmayan dairesel harekete uygulanarak merkezci kuvvet ifadesi elde edilecek ve gerçek olmayan kuvvetlerin kaynağına değinilecektir.

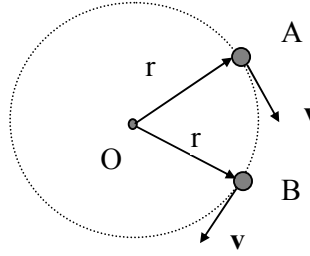
6-1 Düzgün Dairesel Hareket

Dairesel hareket, sabit bir merkez etrafında olan ve yarıçapın değişmediği harekete denir. Dairesel harekette hız vektörünün büyüklüğü değişmese de hareketin doğası gereği yönü hareket boyunca sürekli değiştiğinden dolayı dairesel hareket yapan cismin bir ivmesinin olduğu söylenir. Dairesel harekette hızın yönü yanısıra hızın büyüklüğünün zamanla değişip-değişmediğine bakarak dairesel hareketi iki kısma ayırarak inceleyebiliriz. Bunlar sırası ile *Düzgün Dairesel Hareket* ve *Düzgün Olmayan Dairesel Hareket*'dir.

Düzgün Dairesel Hareket: Dairesel bir yörüngede cismin hızının büyüklüğü (sürat) zamanla değişmiyor ise bu harekete düzgün dairesel hareket denir.

Düzgün Olmayan Dairesel Hareket: Dairesel bir yörüngede cismin hızı zamanla değişiyor ise bu harekete düzgün olmayan dairesel hareket denir.

Sabit bir "O" merkezi etrafında hızının büyüklüğü (sabit sürat) değişmeyen bir cismin hareketini düşünelim. Cisim A ve B noktalarında iken hızın büyüklüğü (sürati) değişmemiştir ancak A ve B noktalarında hız vektörünün yönü değişmiştir. Hız, vektörel bir nicelik olduğundan, yöndeki değişme hız vektöründeki bir değişmeyi göstermektedir.

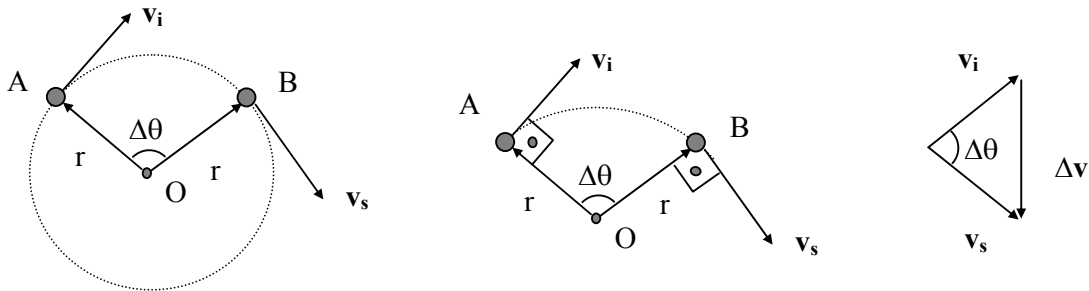


Şekil 6.1: Dairesel hareket

Düzgün dairesel harekette hızın büyüklüğü (sürat) değişmese bile hızın doğrultusu değiştiğinden dolayı hızda bir değişimin olduğu, yani cismin bir ivmesinin olduğu söylenir.

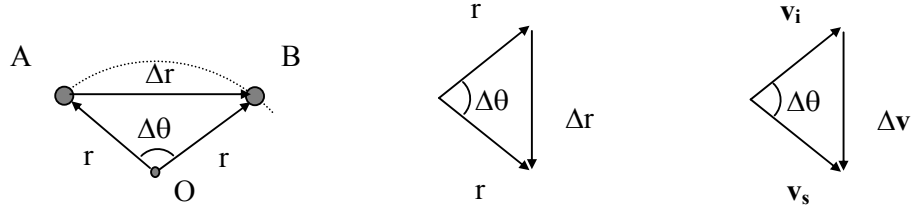
$|\mathbf{v}|=\text{sabit}$ ama hız vektörünün yönü sürekli değiştiğinden $\mathbf{v}$ vektörü zaman içerisinde değişir. Bu sebepten Newton'un 1. kanunundan dolayı $\mathbf{a} \neq 0$ dır.

Şimdi düzgün dairesel hareket yapan bir cismin ivmesini bulmaya çalışalım:



Şekil 6.2 Düzgün dairesel harekette hız vektörünün zamanla değişimi

Cisim t_i zamanında A noktasında ve hızı $\mathbf{v}_i$,
 t_s zamanında B noktasında ve hızı $\mathbf{v}_s$ olsun.



Şekil 6.3 Düzgün dairesel harekette konum vektörünün zamanla değişimi ve hız vektörü ile benzerliği

Hızın büyüklüğü değişmediğinden $|\mathbf{v}_i|=|\mathbf{v}_s|=|v|$ yazabiliriz.

Ortalama ivme tanımımız;

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_s - \vec{v}_i}{t_s - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots 1$$

Yukardaki (Şekil 6.3) r, r, Δr kenarlı ikizkenar üçgeni $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_s$, Δv üçgenine benzediğinden,

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r} \Delta r \quad \dots\dots\dots 2$$

2. eşitliğini 1. eşitlikte Δv yerine koyarsak

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{v}{r} \Delta r\right) \frac{1}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta r}{\Delta t} = v$ olduğundan,

$$a = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}$$

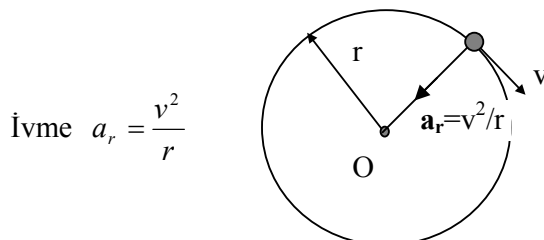
$$a = \frac{v^2}{r} \text{ olduğunu buluruz.}$$

Bu, düzgün dairesel harekette ivmenin büyüklüğünü veren ifadedir. Burada v ve r değerleri sırası ile

v: teğetsel hız,

r: yarıçap

Bu ivmenin yönü, dairenin merkezine doğru yöneldiğinden dolayı **Merkezcil İvme** denir. Merkezcil ivmeyi gösterdiğini belirtmek için yukardaki ivme ifadesini a_r ile gösteririz:

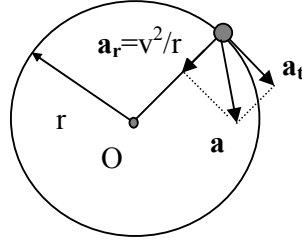


6-2 Düzgün Olmayan Dairesel Hareket

Eğer dairesel hareket yapan cismin hızı vektörünün hem yönü hemde büyüklüğü değişiyor ise bu cismin düzgün olmayan dairesel hareket yaptığı söylenir.

Teğetsel ve Radyal İvme:

Bir parçacığın hızının hem büyüklüğünün hem de doğrultusunun değiştiğini kabul edelim. Bu durumda merkezci ivmeye (a_r) ek olarak cismin teğetsel hızının değişiminden dolayı da teğetsel bir ivme de oluşacaktır.



Teğetsel İvme: Parçacığın hızının büyüklüğündeki değişimden kaynaklanır. Yönü ani hız yönündedir ve büyüklüğü:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Çapsal (Radyal) İvme: Dairesel hareket yapan bir cismin hız vektörünün sadece doğrultusundaki değişimden kaynaklanır ve büyüklüğü

$$a_r = \frac{v^2}{r} \text{ ile verilir.}$$

Burada:

r: teğetsel hız,

r: yarıçap

Bileşke ivme en genel olarak bu iki vektörün vektörel toplamı olarak ifade edilir:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

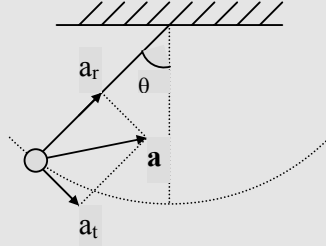
Bu ivme vektörünün büyüklüğü:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \text{ ile verilir.}$$

Örnek 4.8 *Sallanan Top:* 0,5 m uzunluğunda bir sicimin ucuna bağlanan bir top, şekildeki gibi, yerçekiminin etkisi altında düşey bir daire çerçevesinde salınmaktadır. Sicim, düşeyle $\theta=20^\circ$ 'lik açı yaptığı zaman top 1,5 m/s'lik hıza sahiptir.

- İvmenin bu andaki çapsal ($\mathbf{a}_r$) bileşenini bulunuz
- $\theta=20^\circ$ olduğu zaman teğetsel ivmenin ($\mathbf{a}_t$) büyüklüğü nedir?
- $\theta=20^\circ$ 'de toplam ivmenin ($\mathbf{a}$) büyüklüğünü ve doğrultusunu bulunuz.

Çözüm:



$$\theta=20^\circ \quad v=1,5 \text{ m/s}$$

a) Merkezci ivme:

$$a_r = v^2/r = (1,5 \text{ m/s})^2 / (0,5 \text{ m}) = 4,5 \text{ m/s}^2$$

b) Teğetsel ivme:

$$a_t = g \sin \theta = (9,8 \text{ m/s}^2) \cdot \sin(20^\circ) = 3,4 \text{ m/s}^2$$

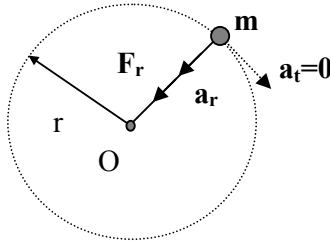
$$\text{c) } \mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$$\text{İvmenin büyüklüğü: } |a| = (a_r^2 + a_t^2)^{1/2} = [(4,5 \text{ m/s}^2)^2 + (3,4 \text{ m/s}^2)^2]^{1/2} = 5,6 \text{ m/s}^2$$

$$\text{yönü: } \phi = \arctan(a_t/a_r) = \arctan[(3,4 \text{ m/s}^2)/(4,5 \text{ m/s}^2)] = 37^\circ \text{ bulunur...}$$

6-3 Newton'un 2. Yasasının Dairesel Harekete Uygulanması

Kütlesi m olan bir cismin düzgün dairesel hareket yaptığını düşünelim.



Cismin merkeze doğru yönelmiş bir ivmesinin olduğunu ve büyüklüğünün

$$a_r = \frac{v^2}{r} \text{ şeklinde olduğunu bulmuştuk.}$$

Newton'un ikinci yasaını düzgün dairesel harekete uygularsak:

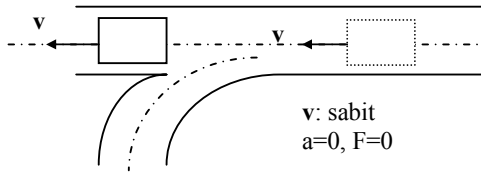
$$\sum F_r = m a_r = m \frac{v^2}{r}$$

olduğunu buluruz. Bu kuvvete *Merkezci Kuvvet* denir ve yönü merkezci ivme ile aynı yönlü yani merkeze yöneliktir.

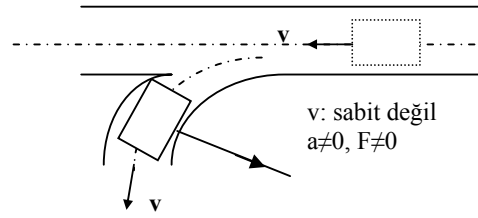
Bu sonuç ile dairesel hareket yapan bir cismin merkeze yönelmiş olan bir kuvvetin etkisinde kaldığını söyleyebiliriz.

Günlük hayatımızda, bulduğumuz bu merkezci kuvvetin aksine, yönü merkezden uzaklaşan yönde bir kuvvetin etkisini gözleriz. Bu kuvvete *Merkezkaç Kuvvet* deriz. Bu bulgularımız ve günlük hayattaki tecrübelerimizin farklı oluşunun mantıksal bir açıklaması vardır ve bunu aşağıdaki şekilde açıklamaya çalışacağız.

Merkezkaç Kuvvet, gerçek bir kuvvet olmayıp sadece fiziksel bir olayı hareketli (eylemli) bir gözlem çerçevesinde izlediğimiz için ortaya çıkan sözde bir kuvvettir. Bunu anlamak için aşağıdaki taşıtın hareketini iki farklı gözlem çerçevesinden inceleyelim:



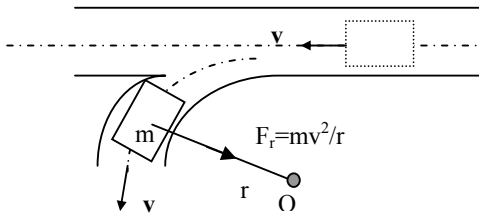
a) Durum-1



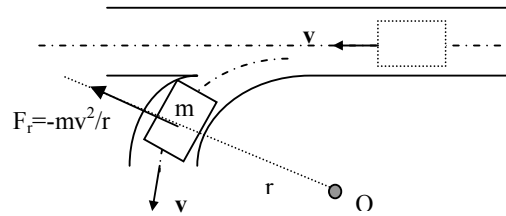
b) Durum-2

Yukardaki birinci durumda (a) cisim sabit bir doğrultuda ve hızda hareket ettiği için ivmesi sıfırdır ve Newton'un ikinci yasası gereği üzerine etki eden kuvvet de sıfır olur. Bu durumu ister hareketli gözlem çerçevesinden (arabanın içinden) isterse durağan bir gözlem çerçevesinden izleyelim aynı fiziksel olayı gözlemliyoruz.

Arabanın hızının büyüklüğünü koruyarak (sabit sürat) yoldan ayrılmasını gösteren ikinci durum (b) birinci durumdan çok farklıdır. Burda arabanın hızının büyüklüğü değişmemesine rağmen viraja girdiğinden hızın yönü değiştiği için ivmesi sıfırdan farklıdır ve dolayısı ile de üzerine merkezci bir kuvvet etki etmektedir. Araba ivmeli bir hareket yaptığı için artık bu araba eylemsiz bir gözlem çerçevesi olmaktan çıkar ve bu gözlem çerçevesinden gözleyeceğimiz olaylar eylemsiz (durağan) bir çerçeveden gözleyeceğimiz olaylardan farklı olur. Yukardaki ikinci durumu hem arabanın içindeki bir gözlem çerçevesinden hemde dışardaki bir gözlem çerçevesinden izleyerek merkezkaç kuvvetin neden gerçek bir kuvvet olmadığını fakat bunun yanında günlük deneyimlerimizde neden varlığını hep hissettiğimiz bir kuvvet olduğunu anlayabiliriz.



Arabanın dışında, durağan (eylemsiz) bir gözlem çerçevesinden bakıldığında



Arabanın içinden (eylemli) gözlem çerçevesinden bakıldığında

Viraja giren arabaya eylemsiz bir gözlem çerçevesinden (arabanın dışında, durağan bir çerçeveden) bakıldığında yapacağımız gözlem şu olacaktır: başlangıçta araba sabit bir v hızı ile gidiyordu ve ivmesi sıfırdı. Ama tam viraja geldiği anda araba bir kuvvetin etkisi altında kalarak dairesel bir hareket yapmaya zorlandı ve bu kuvvet “O” merkezine yönelen merkezciil kuvvetten başka bir şey olamaz.

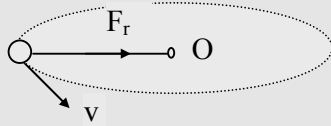
Aynı gözlemi arabanın içinden yaptığımızda ise yapacağımız gözlem şu olacaktır: başlangıçta cisim sabit bir v hızı ile gidiyordu ve ivmesi sıfırdı. Ama tam viraja geldiği anda dışarıya doğru savrulduğumuzu yani “O” merkezinin tersi yönünde merkezkaç bir kuvvetin etkisinde kaldığımızı gerçeği.

Yukardaki gözlemlerimizden şu sonuçları çıkarabiliriz: ivmeli hareket yapan araba, eylemli bir gözlem çerçevesi olduğundan bu gözlem çerçevesinden yapacağımız gözlemler bizi yanıltır ve gerçek olmayan kuvvetleri, örneğin merkezkaç kuvvetini, hissetmemize neden olur. Bunun yanında eylemsiz bir gözlem çerçevesinden yapacağımız gözlemler gerçek kuvvetleri (örneğin merkezciil kuvvet) gözlemlememizi olanaklı kılar.

Özetle, gerçek olan Merkezciil Kuvvettir, Merkezkaç Kuvvet ise ivmeli (eylemli) gözlem çerçevesinde yapılan gözlemin bir sonucu olarak ortaya çıkan yalancı bir kuvvettir yani gerçek bir kuvvet değildir.

Örnek 6.2 0,5 km kütleli bir top, 1,5 m uzunluğunda kablonun ucuna bağlanmıştır. Top, şekilde görüldüğü gibi yatay düzlemde dairesel yörüngede hızla döndürülüyor. Kablo 50 N’luk maksimum gerilmeye dayanabiliyorsa, kopmadan önce topun sahip olabileceği maksimum sürat nedir?

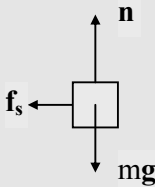
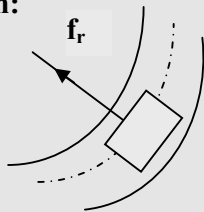
Çözüm:



$$\begin{aligned}\sum F_r &= ma_r = mv^2/r \\ T &= mv^2/r \Rightarrow v = (rT/m)^{1/2} \\ v_{\max} &= (rT_{\max}/m)^{1/2} \\ v_{\max} &= [(1,5\text{m}).(50\text{N})/(0,5\text{kg})]^{1/2} = 12,2 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Örnek 6.4 1500 kg kütleli bir araba düz bir yolda şekilde görüldüğü gibi 35 m yarıçaplı bir virajda hareket etmektedir. Yol ile tekerlekler arasındaki statik sürtünme katsayısı kuru zemin için 0,5 ise arabanın emniyetli olarak dönebileceği maksimum hızı bulunuz.

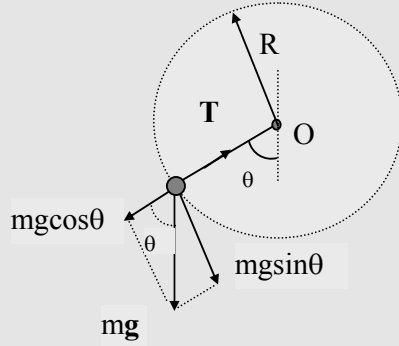
Çözüm:



$$\begin{aligned}f_r &= ma_r = mv^2/r, \quad f_{s,\max} = \mu_s n, \quad n = mg \\ v_{\max} &= (rf_{s,\max}/m)^{1/2} = (r\mu_s mg/m)^{1/2} = (r\mu_s g)^{1/2} \\ v_{\max} &= [(35\text{m}).(0,5).(9,8\text{m/s}^2)]^{1/2} = 13,1 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Örnek 6.4 Dönen Top: m kütleli küçük bir küre şekilde görüldüğü gibi R uzunluğunda bir ipin ucuna bağlanarak düşey düzlemde bir O noktası etrafında dairesel yörüngede döndürülüyor. Cismin hızının v olduğu ve ipin düşeyle θ açısı yaptığı bir anda ipteki gerilmeyi hesaplayınız.

Çözüm:



Hız düzgün olmadığından $a_t \neq 0$

Teğet doğrultusundaki kuvvet:

$$\sum F_t = mg \sin \theta = ma_t$$

$$a_t = g \sin \theta$$

Çapsal doğrultudaki kuvvet:

$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = mv^2/r$$

$$T = (v^2/r + g \sin \theta)$$

Özel Durumlar:

- 1) Yörüngenin üst noktasında $\theta = 180^\circ$, $\cos(180^\circ) = -1$
 $T = (v_{\text{üst}}^2/r - g)$ (ipteki gerilim minimum!)
- 2) Yörüngenin alt noktasında $\theta = 0^\circ$, $\cos(0^\circ) = +1$
 $T = (v_{\text{alt}}^2/r + g)$ (ipteki gerilim maksimum!)

6-4 Newton'un 2. Yasasının Düzgün Olmayan Dairesel Harekete Uygulanması

Eğer dairesel yörüngede hareket eden cismin hızının büyüklüğü de zaman içerisinde değişiyor ise, merkezci ivmeye ek olarak birde teğetsel ivme var olacaktır. Cismin toplam ivmesi bu iki ivme vektörünün vektörel toplamı olacaktır.

Toplam İvme

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

Kuvvet:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t) = m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_t$$

Burada;

$m\mathbf{a}_r$ =Merkezcil Kuvvet

$m\mathbf{a}_t$ =Teğetsel Kuvvet

dir.

Bölüm 6'nın sonu