

## Bölüm 7: İş ve Kinetik Enerji

### Kavrama Soruları

- 1- Kuvvet ve yer değiştirmenin sıfırdan farklı olduğu durumlarda iş sıfır olabilir mi?
- 2- Dairesel harekette merkezci kuvvetin yaptığı iş nedir (veya iş yapar mı?)?
- 3- İki vektörün skaler çarpımı neden skaler bir sayıdır?
- 4- Bir ton buğday tanesini bir binanın tepesine çıkaran bir vinç ile bir karıncanın yaptıkları iş aynı mıdır?
- 5- Karınca mı yoksa vinç mi daha güçlüdür?

### Konu İçeriği

Sunuş

- 7-1 Sabit bir kuvvetin yaptığı iş
- 7-2 İki vektörün skaler çarpımı
- 7-3 Değişken kuvvetin yaptığı iş
- 7-4 Kinetik enerji ve iş-kinetik enerji teoremi
- 7-5 Güç

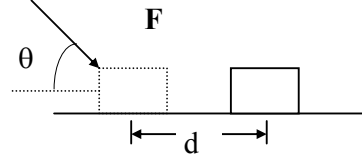
### Sunuş

Bu bölümde, iş tanımı yapılacak, önce sabit bir kuvvetin yaptığı iş, daha sonra büyüklüğü konuma göre değişen bir kuvvetin yaptığı iş hesaplanacaktır. İki vektörün skaler çarpımı anlatılacak ve iş ifadesinin skaler çarpım olarak nasıl ifade edileceği gösterilecektir. Son olarak da güç kavramına değinilecektir.

## 7-1 Sabit Bir Kuvvetin Yaptığı İş

**İş:** Cisim üzerine sabit bir kuvvet uygulayan bir etkenin cisim üzerinde yaptığı iş,  $W$ , kuvvetin ( $F$ ) yer değiştirme ( $d$ ) yönündeki bileşeni ile yer değiştirmenin çarpımıdır.

$$W=(F.\cos\theta)d$$



Burada:

$F$ : uygulanan kuvvet

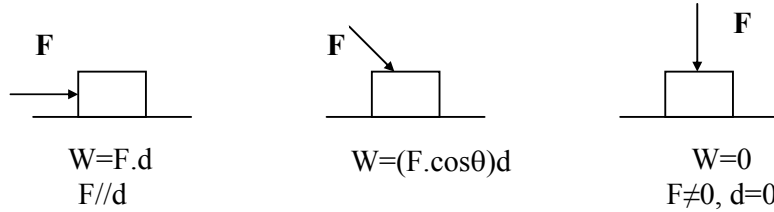
$d$ : yer değiştirme

$\theta$ :  $F$  ile  $d$  yer değiştirme vektörü arasındaki açı

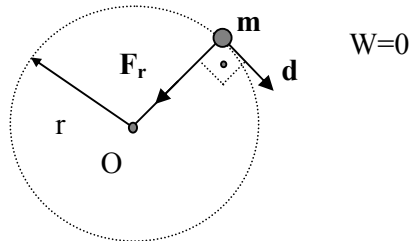
İş, skaler bir nicelik. Boyutu [kuvvet].[uzunluk] yada temel boyutlar cinsinden  $[ML^2/T^2]$ .

İşin SI birim sisteminde birimi *newton-metre* (N.m) veya *Joule* (J) olarak ifade edilir.

İşin sıfırdan farklı olabilmesi için kuvvet ( $F$ ) ve yer değiştirme ( $d$ ) niceliklerinden her ikisinin de değerinin sıfırdan farklı olması gerekmektedir.



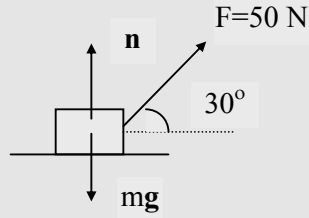
Bu şartın yanında, yer değiştirmenin kuvvet yönünde bileşeninin de olması gerekmektedir. Eğer yer değiştirme ile kuvvet arasında  $90^\circ$ 'lik bir açı varsa yapılan iş sıfırdır. Bu duruma en güzel örnek dairesel harekettir. Dairesel harekette dairesel hareket yapan cisme etki eden kuvvet çapsal doğrultuda ve merkeze doğru olmasına rağmen cismin yer değiştirmesi bu kuvvete dik olan yörüngeye teğet doğrultudadır.



$$W=(F.\cos 90^\circ)d=0$$

**Örnek 7.1** Bir adam bir cismi yatayla  $30^\circ$ 'lik bir açıda  $F=50$  N büyüklüğünde bir kuvvet ile çekiyor. Cisim yataya doğru 3m yer değiştirdiğinde kuvvetin cisim üzerinde yaptığı işi hesaplayınız.

**Çözüm:**

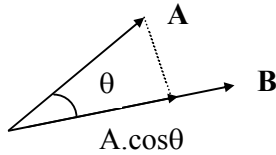


$$\begin{aligned} W &= (F \cos \theta) d \\ &= (50 \text{ N}) \cdot (\cos 30^\circ) \cdot (3 \text{ m}) \\ &= 130 \text{ J} \end{aligned}$$

Kuvvetin yukarı yönlü bileşeni  $F \sin \theta$ , cisim üzerine hiçbir iş yapmaz çünkü bu kuvvet yer değiştirmeye diktir.

## 7.2 İki Vektörün Skaler Çarpımı

**A** ve **B** gibi herhangi iki vektörün skaler çarpımı, bu iki vektörün büyüklükleri ile bunların arasındaki açının kosinüsünün çarpımına eşit olan skaler bir niceliktir.



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot \cos \theta \quad \text{Skaler Çarpım}$$

Skaler çarpımda vektörlerden birinin diğer vektör üzerindeki iz düşümü alınarak aynı doğrultuya getirilir ve bunlara skaler sayı nuammelesi yapılabilir.

**A** ve **B** vektörlerini birim vektörler cinsinden ifade ederek iki vektörün skaler çarpımını bulmaya çalışalım.

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

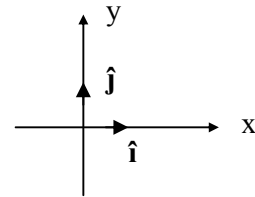
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) = A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j})$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 0^\circ, \cos(0^\circ) = 1)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 0^\circ, \cos(0^\circ) = 1)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 90^\circ, \cos(90^\circ) = 0)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y$$



$$A \text{ ve } B \text{ arasındaki açı } \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| \cdot |B|}$$

Eğer vektör üç boyutta tanımlanmış ise;

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

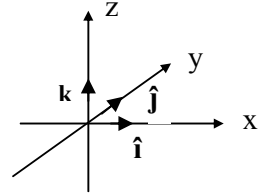
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j})$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 0^\circ, \cos(0^\circ) = 1)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 0^\circ, \cos(0^\circ) = 1)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 0^\circ, \cos(0^\circ) = 1)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad (\text{İki birim vektör arasındaki açı } \theta = 90^\circ, \cos(90^\circ) = 0)$$



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

bulunur.

**Örnek 7.2**  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{B}$  vektörleri  $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$  ve  $\mathbf{B} = -\hat{i} + 2\hat{j}$  olarak veriliyor.

a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  skaler çarpımını hesaplayınız.

b)  $\mathbf{A}$  ile  $\mathbf{B}$  arasındaki açıyı bulunuz.

**Çözüm:**

a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j}) = -2 + 6 = 4$  birim

b)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$

$\mathbf{A}$ 'nın büyüklüğü  $|\mathbf{A}| = (2^2 + 3^2)^{1/2} = (13)^{1/2}$

$\mathbf{B}$ 'nin büyüklüğü  $|\mathbf{B}| = ((-1)^2 + 2^2)^{1/2} = (5)^{1/2}$

$$\cos \theta = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 4 / [(13)^{1/2} \cdot (5)^{1/2}] \Rightarrow \theta = \arccos(4/8,06) = 60,2^\circ$$

Skaler çarpım notasyonunu kullanarak daha önce tanımladığımız işi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{d}| \cdot \cos \theta$$

Burada  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{d}$  her ikiside vektörel nicelikler.

### 7.3 Değişken Bir Kuvvetin Yaptığı İş

Bölüm 7.1 de tanımladığımız iş ifadesinde  $\mathbf{F}$  kuvvetinin büyüklüğünü sabit kabul etmiştik.  $\mathbf{F}$  kuvveti sabit ise bu kuvvetin yaptığı iş

$$W = (F \cos \theta) \cdot d \quad \text{şeklinde tanımlamıştık}$$

Eğer **F** kuvveti sabit değil ise yani **F**'in değeri (büyüklüğü) konum ile değişiyor ise;  
Kuvvet her küçük  $\Delta x$  yer değiştirmesinde sabit ise, her  $\Delta x$  aralığında yapılan iş;

$$\Delta W = F_x \cdot \Delta x$$

$F_x$ : **F** kuvvetinin yerdeğiştirme ( $\Delta x$ ) yönündeki bileşeni

$\Delta x$ : yer değiştirme

Yapılan toplam iş bulmak istersek her  $\Delta x$  aralığında yapılan işleri ( $F_x \cdot \Delta x$ ) toplamamız gerekecektir. Bu toplamı matematiksel olarak ifade edersek:

$$W = \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x$$

Yer değiştirme  $\Delta x$ 'i çok küçük alırsak toplam iş ifadesi yukardaki kesikli toplam ( $\sum$ ) ifadesi sürekli toplam ( $\int$ ) ifadesine dönüşür. Sürekli toplamı gösteren bu ifade matematikte “integral” olarak bilinir.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_s} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx \quad \text{Değişken bir kuvvetin yaptığı iş}$$

Konuma göre değişen kuvvete verilebilecek güzel bir örnek kütle yay-sistemidir. Bir yayın uyguladığı kuvvet, yayın denge noktasından ne kadar uzaklaştığı ( $x$ ) ile ve yayı karakterize eden yay sabiti ( $k$ ) ile orantılıdır.

$$F = -kx$$

$k$ : yay sabiti, boyutu  $[k] = [\text{Kuvvet}]/[L]$

$x$ : denge konumundan olan yerdeğiştirme

Buradaki (-) işaret kuvvetin yerdeğiştirme ile ters yönlü olduğunu göstermektedir. Buna göre bir kütle-yay sisteminde yayı denge konumundan  $d$  kadar uzaklaştırmakla yay üzerinde yapılacak işi hesaplamaya çalışırsak:

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx = \int_{x_i=0}^{x_s=d} -kx dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_i=0}^{x_s=d} = -\frac{1}{2} kd^2 - \left(-\frac{1}{2} k0^2\right) = -\frac{1}{2} kd^2$$

Buradan, yay sabiti  $k$  olan bir yayı denge konumundan  $x$  kadar uzaklaştırmak için yapılması gereken iş için genel bir ifade elde ederiz:

$$W = \frac{1}{2} kx^2$$

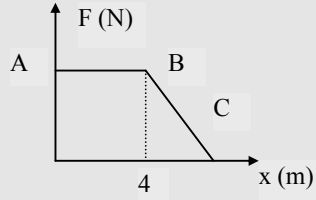
Eğer, bu problemi sabit kuvvet için türettiğimiz iş ifadesini kullanarak yapmış olsaydık elde edeceğimiz iş ifadesi:

$$W = F \cdot x = -kx \cdot x = -kx^2 = -kd^2 \quad (\text{yanlış!})$$

olaçaktı ki bu yukarda bulduğumuz ifadeden ( $1/2$ ) kadar farklı olacaktır.

**Örnek 7.4** Bir cismin üzerine etkiyen kuvvet şekilde görüldüğü gibi  $x$  ile değişmektedir. Cisim  $x=0$ 'dan  $x=6$ 'ye hareket ettiğinde kuvvetin yaptığı işi hesaplayınız.

**Çözüm:**



Kuvvetin yaptığı iş,  $x=0$  ile  $x=6$  m arasındaki eğrinin altında kalan toplam alana eşittir ( $F_x \cdot x$  ifadesinden). A ve B arasındaki dikdörtgenin alanı ve B ile C arasındaki üçgenin alanının toplamı toplam alana eşittir.

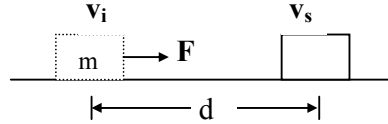
$$\text{A-B arası: } (5\text{N}) \cdot (4\text{m}) = 20 \text{ J}$$

$$\text{B-C arası: } (\frac{1}{2})(5\text{N}) \cdot (2\text{m}) = 5\text{J}$$

$$\text{Toplam iş } W = 20\text{J} + 5\text{J} = 25 \text{ Joule}$$

## 7.4 Kinetik Enerji ve İş-Kinetik Enerji Teoremi

Sabit bir  $F$  kuvvetinin etkisi altında sağa doğru hareket eden  $m$  kütleli bir cismi göz önüne alalım.



Cismin, kuvvet uygulanmadan önceki hızı  $v_i$  ve  $F$  kuvvetinin  $d$  mesafesi boyunca uygulandıktan sonraki hızı da  $v_s$  olsun.

Kuvvet sabit olduğu için cisim,  $d$  mesafesi boyunca sabit bir  $a=F/m$  ivmesi ile hareket edecektir ve hızı  $v_i$  den  $v_s$  a çıkacaktır.

$F$  kuvvetinin yaptığı  $d$  mesafesi boyunca cismin üzerinde yaptığı toplam iş:

$$W = F \cdot d = (ma) \cdot d$$

Yer değiştirme  $d = \frac{1}{2}(v_i + v_s)t$  (ivme sabit olduğundan ortalama hızı kullanabiliriz)

İvme  $a = \frac{v_s - v_i}{t}$  (ivme tanımından)

$$\sum W = m \left( \frac{v_s - v_i}{t} \right) \cdot \left( \frac{1}{2}(v_i + v_s)t \right) = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$\frac{1}{2}mv^2$  niceliği parçacığın hareketi ile ilgili enerjiyi temsil eder. Bu niceliğe **Kinetik Enerji** denir.

Genel olarak bir v hızı ile hareket eden m kütleli bir parçacığın kinetik enerjisi (K):

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ olarak tanımlanır.}$$

Kinetik enerji skaler bir niceliktir ve iş ile aynı boyut ve birime sahiptir.

Yukardaki ifade de cismin F kuvveti uygulanmadan önceki  $v_i$  hızından dolayı sahip olduğu kinetik enerjiyi  $K_i$ , F kuvvetinden sonra  $v_s$  hızından dolayı da sahip olduğu kinetik enerjiyi  $K_s$  ile gösterirsek, yukardaki ifadeyi

$$\Sigma W = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\Sigma W = K_s - K_i = \Delta K \text{ şeklinde gösterebiliriz.}$$

Burada:

$K_s$ : son kinetik enerji

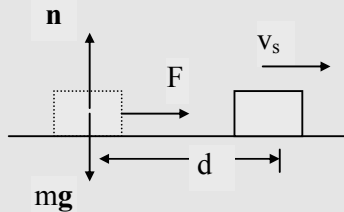
$K_i$ : ilk kinetik enerji

$\Sigma W$ : yapılan toplam iş

Bu eşitlik “**İş-Kinetik Enerji**” teoremi olarak bilinir. Bu teorem, dışardan uygulanan bir kuvvetinin cismin hızını  $v_i$ ’den  $v_s$ ’a çıkarmakla cismin kinetik enerjisinde  $\Delta K$ ’lık bir artışa neden olur.

**Örnek 7.7** Başlangıçta durgun olan 6 kg’lık bir blok, 12 N’luk sabit, yatay bir kuvvetle yatay sürtünmesiz bir yüzey boyunca çekilmektedir. Blok 3m’lik bir uzaklığa hareket ettikten sonra hızını bulunuz.

**Çözüm:**



$$W = F \cdot d = (12\text{N}) \cdot (3\text{m}) = 36 \text{ N}\cdot\text{m} = 36 \text{ J}$$

$$= 1,5 \text{ m/s}$$

İlk kinetik enerji sıfır olduğu dikkate alınırsa

$$W = K_s - K_i = 36 \text{ J}$$

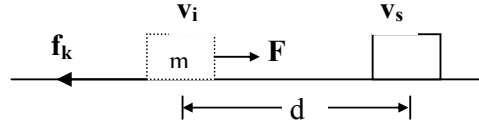
$$K_s - 0 = 36 \text{ J}$$

$$K_s = 36 \text{ J} = \frac{1}{2}mv_s^2$$

$$v_s = 3,5 \text{ m/s bulunur...}$$

### Kinetik Sürtünmeyi İçeren Durumlar

Eğer bir yüzey üzerinde hareket eden bir cisme sürtünme kuvveti etki ediyorsa, bu kuvvet cismin kinetik enerjisini azaltacak yönde olur.



Sürtünme kuvvetinin yaptığı iş:

$$W = -f_k \cdot d$$

$f_k$ : kinetik sürtünme kuvveti

$d$ : yer değiştirme

Sürtünme kuvveti her zaman hızın doğrultusunun tersi yönde olduğu için, cisim üzerine yapılan toplam iş ifadesi

$$\Sigma W - f_k \cdot d = W$$

İş-kinetik enerji formülünde sürtünmeyi de yazarsak

$$\Sigma W = K_s - K_i = \Delta K$$

$$\Sigma W - f_k \cdot d = K_s - K_i = \Delta K$$

### 7.5 Güç

İş yapma hızına güç denir. Bir cisme bir dış kuvvet uygulanırsa bu kuvvetin  $\Delta t$  süresinde yaptığı iş  $W$  ise bu sürede harcanan ortalama güç:

$$P = W / \Delta t$$

olarak tanımlanır.

Ani gücü tanımlarsak ( $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Güç ile kuvvet ilişkisine bakacak olursak

$$\Delta W = F dx$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \frac{dx}{dt} = F \cdot v$$

SI birim sisteminde güç birimi Joule/saniye (J/s)'dir. Bu birim aynı zamanda Watt (W) olarak da adlandırılır.

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$$

İngilizler güç birimi olarak Beygir Gücünü kullanır (BG)

$$1 \text{ BG} = 746 \text{ W a eşdeğerdir.}$$

Güç birimi ile enerjiyi ifade edersek

$$\text{Güç} = \text{enerji/zaman}$$

**Örnek 7.8** *Pürüzlü bir yüzey üzerinde çekilen blok:* Örnek 7.7'deki yüzey 0,15'lik bir kinetik sürtünme katsayısına sahip ise bloğun son süratini bulunuz.

**Çözüm:**

$$W = F \cdot d = (12 \text{ N}) \cdot (3 \text{ m}) = 36 \text{ J}$$

Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü:

$$f_k = \mu_k \cdot n = \mu_k mg = (0,15) \cdot (6 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) = 8,82 \text{ N}$$

$$\Delta K = -f_k \cdot d = (-8,82 \text{ N}) \cdot (3 \text{ m}) = -26,5 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)mv_i^2 + \sum W - f_k d &= \left(\frac{1}{2}\right)mv_s^2 \\ 0 + 36 \text{ J} - 26,5 \text{ J} &= \left(\frac{1}{2}\right)(6 \text{ kg})v_s^2 \\ v_s &= 1,8 \text{ m/s bulunur..} \end{aligned}$$

*Bölüm 6'nın sonu*