

9 Çizgisel Momentum ve Çarpışmalar

9.1 Çizgisel Momentum ve Korunumu

9.2 İtme ve Momentum

9.3 Tek Boyutta Çarpışmalar

9.4 İki-boyutta Çarpışmalar

9.5 Kütle Merkezi

9.6 Parçacıklardan Oluşan Bir Sistemin Hareketi

9.7 Roket İtmesi



Hareketli bowling topu bir momentum taşır. Top ve lobutlar çarpışınca toptaki momentum lobuta aktarılır (Mark Cooper/Corbis Stock Market).

Çizgisel Momentum

Top büyük bir hızla lob a çarpar ve lob avada uçar ve diğer loblara çarpar. Pinlere çok kısa sürede büyük yer değiştirmelerine neden olur. Newton un 3ncü yasasına göre lob topa karşı bir tepki kuvveti gösterir. Bu tepki kuvveti topun çarpışmadan önceki hareketine zıt yönde ivmeli hareketine neden olur. Lob ların F ve a değerleri çok büyük olmasına rağmen bu değerler zaman içinde değişmektedir. Bu bölümde bu hızlı değişiklikler anlamaya çalışılacaktır. Önce cisimlerin hareketlerini tanımlamada çok kullanışlı olan *momentum* kavramını anlamaya çalışacağız. Karşı takımlarda olan iki futbolcunun topa doğru hareketlenmelerini düşünün, futbolculardan birisi 70 kilogram diğeri ise 90 kilogram olsun. Futbolculardan birisi diğeri göre topa daha yakın olsun ve her ikiside 5 m/s hızla topa doğru koşsunlar. Topu kazanamayan diğeri faul yaparsa örneğin çarparsa sonuç ne olur? Bu tür konular bu bölümde açıklanmaya çalışılacaktır. *Kütle merkezi* kavramı ile olayların incelenmesi daha kolay olacaktır.

9.1 Çizgisel Momentum ve Korunumu

Bundan önceki iki konuda Newton yasaları karmaşık sistemler için kullanıldı. Bazı sistemler korunum yasalarını örneğin enerji korunumunu kullanarak çözüldü.

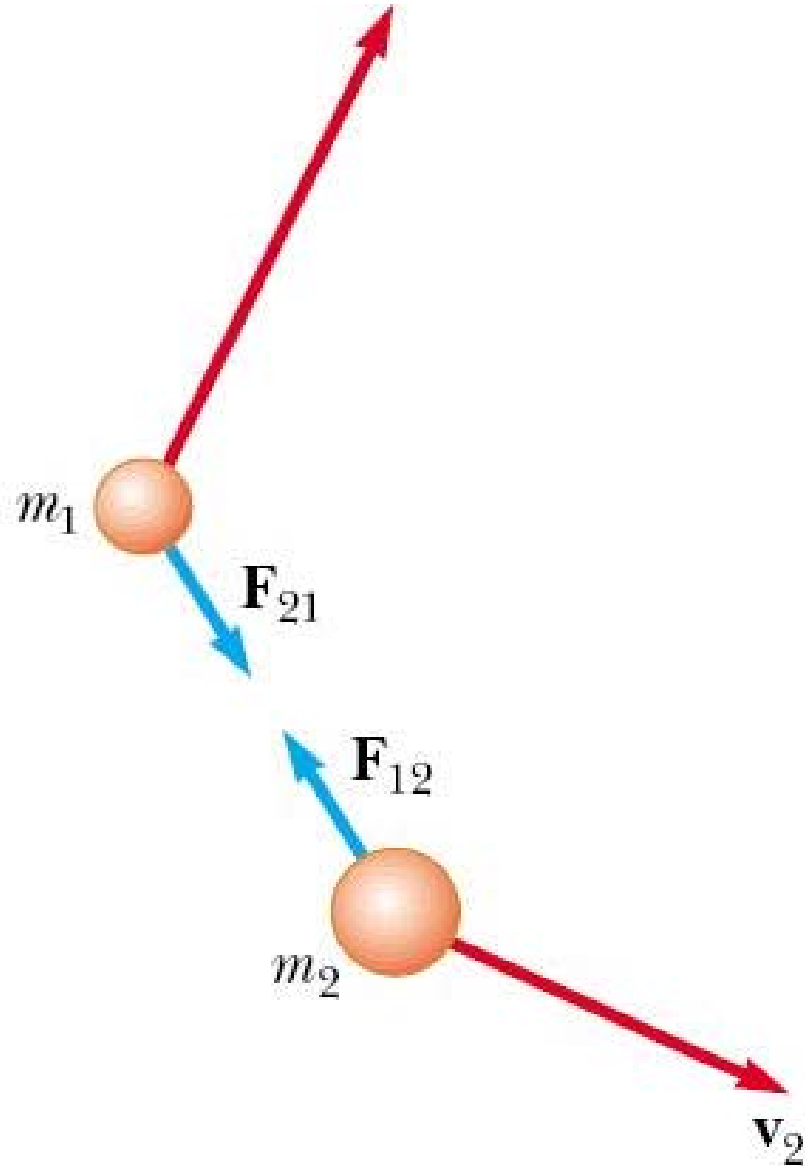
Sürtünmesiz buz zemin üzerindeki 60 kg lık bir okçu 0.5 kg lık oku 50 m/s lik hızla atarsa, Newton un üçüncü yasasına göre yayın oka etkidiği kuvvet kadar okçuyada ters yönde bir kuvvet etki eder. Bundan dolayı okçu bir miktar geriye doğru gider.

Bu geriye gitme sürati ne kadar olur? Newton un ikinci yasası veya enerji bilgileri kullanılarak elde edilemez. Elimizde yeterli bilgi yoktur. Fakat çizgisel momentum ile problemi çözebiliriz. Kütleleri m_1 ve m_2 ve cisimlerin hızlarını da $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ olarak alalım. Sistem izole edilmişse bir parçacığa etki eden yegane kuvvet Newton yasaları ile ifade edilir. 1 nolu parçacığa etki eden kuvvet (örneğin yerçekimi kuvveti) diğesinde etki eder. Öyleyse bundan farklı bir kuvvet 2 nolu parçacığa etkiyorsa bu kuvvete zıt zönde büyüklüğü aynı olan bir kuvvet 1 nolu parçacığa etki eder:

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21}$$

9.1 Çizgisel Momentum ve Korunumu

Şekil 9.1 İki parçacığın birbiri ile etkileşmesi.
Newton'un 3'ncü yasasına göre $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$



9.1 Çizgisel Momentum ve Korunumu

Newton'un etki-tepki ve hız değişikliği ile ilgili olan kuvvet yasaları kullanılırsa yandaki denklemler elde edilir.

Cisimlerin hareketleri esnasında kütlelerinin sabit kaldığını kabul ediyoruz.

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0$$

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0$$

Son denklemdaki parantez içindeki terim çizgisel momentum eşitliğidir.

Çizgisel momentum

Türev ifadesinde zaman sıfır olarak alınır, ya da parantez içindeki terim zamana bağlı olarak değişmiyorsa $m_1 v_1 + m_2 v_2$ kullanılabilir. Sonuç olarak toplam sabittir. mv niceliği parçacık için önemlidir. Bu niceliğe *çizgisel momentum* denir.

Kütlesi m ve hızı v olan bir parçacığın veya bir cismin çizgisel momentumu bu iki terimin çarpımı şeklinde yandaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{p} \equiv m \mathbf{v}$$

Boyut analizi yapılırsa,

$$ML/T$$

SI birim sistemindeki değeri

$$kg \cdot m/s$$

Vektör bileşenleri olarak aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z$$

Newton un ikinci yasası ve çizgisel momentum

Newton un hareketle ilgili olan ikinci yasası kullanılırsa bir parçacığın çizgisel momentumu ile parçacığa etki eden kuvvet arasında bir bağıntı kurulabilir. Newton un ikinci yasası ve ivme tanımı birlikte kullanılırsa:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Kütlenin miktarının zamana bağlı olarak değişmediğini kabul ederek aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Bir parçacığın zamana bağlı olarak çizgisel momentumunun değişmesi o parçacık üzerine etki eden net kuvveti tanımlar. Bir roketin itme hareketi $F=ma$ ile açıklanamaz.

Quick Quiz 9.1

Aynı kinetik enerjisine sahip iki cisimin momentumlarının büyüklükleri için ne söylenebilir?

(a) $p_1 < p_2$

(b) $p_1 = p_2$

(c) $p_1 > p_2$

(d) *Bir şey söylemek için bu bilgi yetersiz.*

Quick Quiz 9.2

Beden eğitimi hocası bir beyzbol topunu size doğru fırlatıyor ve hemen ardından beyzbol topunun 10 katı daha fazla kütleyle sahip büyük bir topu size doğru fırlatıyor. Aşağıdakileri yakalama açısından zordan kolaya doğru sıralayınız?

Yakaladığınız büyük top

- (a) Beyzbol topu ile aynı süratte atılmışsa,
- (b) Aynı momentuma sahipse,
- (c) Aynı kinetik enerjiye sahip ise.

Çizgisel momentumun korunumu

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

$$\mathbf{p}_{\text{top}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Yukarıdaki ifadenin zamana bağlı türevi sıfırsa,

$$\mathbf{p}_{\text{top}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{sabit}$$

Yani toplam çizgisel momentum korunuyordur demektir.

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$

Son ifade çizgisel momentumun korunumudur.

İki veya daha fazla sayıdaki parçacıktan oluşan izole bir sistemin toplam momentumu korunur, yani zamanla değişmez sabit kalır.

Quick Quiz 9.3

Bir top hava direncinin önemsiz olduğu bir durumda serbest düşmeye bırakılıyor. Aşağıdaki sistemlerden hangisinin momentumu korunur?

- (a) Top
- (b) Dünya
- (c) Top ve dünya sistemi
- (d) Belirlemek imkansızdır.

Quick Quiz 9.4

Bir binek araba ve kamyon aynı süratte gitmekte iken kafa kafaya çarpışırlar ve çarpışmadan sonra birlikte hareket ederler. Hangi aracın momentumunda büyük değişiklik olur?

- (a) Binek araç
- (b) Kamyon
- (c) Her ikisinin momentumundaki değişim aynıdır
- (d) Belirlemek imkansızdır.

Örnek 9.1 Okçu

60-kg lık bir okçu sürtünmesiz buz üzerinde iken 0.5-kg lık oku yere paralel bir şekilde ileriye doğru fırlatmaktadır. Okçunun hızını hesaplayınız.

Problem $F=ma$ ifadesinden çözülemez
Bu yüzden çizgisel momentum korunumundan yararlanılır..



Örnek 9.1 Okçu

$$m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} = 0$$

$$m_1 = 60 \text{ kg},$$

$$m_2 = 0.50 \text{ kg},$$

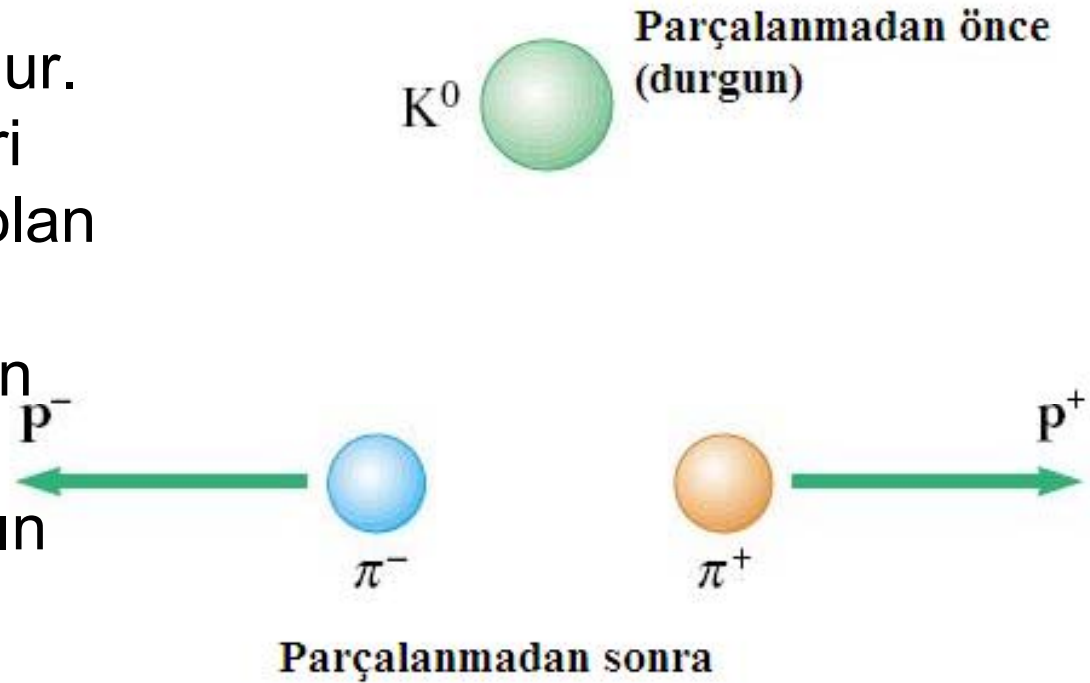
$$\mathbf{v}_{2f} = 50\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1f} &= -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_{2f} \\ &= -\left(\frac{0.50 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}\right) (50\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) \\ &= -0.42\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Sonuçtaki eksi değeri okçunun oka göre ters yönde hareket edeceğini göstermektedir.

Örnek 9.2 Durgun kaon un parçalanması

Nükleer parçacıklardan biriside nötral kaon (K^0) dur. Kaon parçalanınca yükleri farklı fakat kütleleri aynı olan pionlara ayrılır (π^+ ve π^-). Kaonu başlangıçta durgun olduğunu kabul ederek pionların momentumlarının aynı büyüklükte fakat zıt işaretli yani zıt yönlerde olduğunu gösteriniz.



Kaon

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-$$

$$\mathbf{p}_i = 0$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f = 0,$$

$$\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^- = 0$$

İzole edilmiş bir sistem için

$$\mathbf{p}^+ = -\mathbf{p}^-$$

9.2 İtme ve Momentum

Bir cismin momentumundaki değişimin cisim üzerine bir kuvvet etkidiğini göstermektedir. Momentum zamana bağlı olarak değişiyorsa Newton'un ikinci yasasına göre

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt,$$

veya

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemin kuvvetin etkidiği sürece integrali alınırsa yandaki eşitlik elde edilir. Son ifadeyi momentum-impuls teoremi olarak tanımlayabiliriz.

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

Sağdaki ifade **Impuls** olarak tanımlanır.

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

Impuls – momentum değişimi

Bir parçacık üzerine etki eden **F** kuvvetinin impulsu parçacığın momentumundaki değişime eşittir.

Yukarıdaki ifade ikinci Newton yasasının değişik bir ifadesidir. Impuls vektörel bir niceliktir ve yklğ kuvvet-zaman eğrisinin altında kalan alana eşittir. Zaman aralığı

$\Delta t = t_f - t_i$ ile tanımlanmaktadır. Impuls vektörünün yn momentumun değişimi vektörü ile aynı doğrultudadır.

Impuls un birimi ile momentum aynı boyutlardadır.Yani ML/T (ktle uzunluk / zaman) şeklindedir. Impuls parçacığın bir özelliği değildir. Cisme etki eden kuvvetin cismin momentumundaki değişimini gösterir.

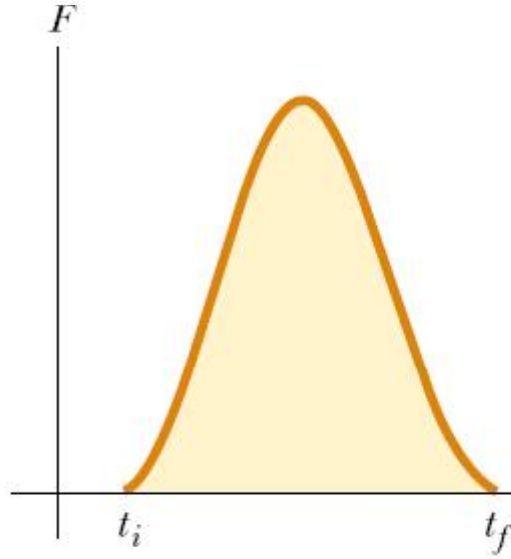
Impuls

Ortalama kuvvet

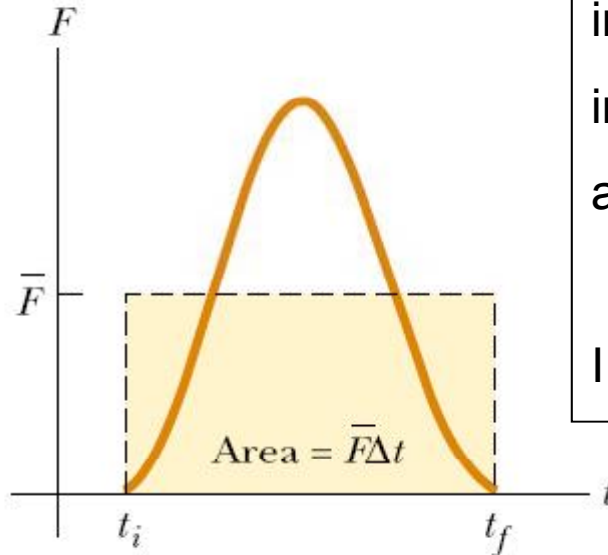
$$\bar{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\mathbf{I} \equiv \bar{\mathbf{F}} \Delta t$$



(a)



(b)

Şekil 9.4 (a) Bir parçacığa etki eden kuvvetin zamana bağlı olarak değişimi. Parçacığa aktarılan impuls kuvvet-zaman eğrisinin altında kalan alandır. (b) Δt ,

zaman aralığında *zaman ortalamalı-kuvvet* in (kesikli çizgilerle belirtilen dörtgen) impulsu (a) daki kuvvetin impulsu ile aynıdır.

$I = F \Delta t$ eşitliği bir çok olay için yazılabilir.

Araba arpışma testleri



Hava yastıklı araçlarda kaza anında hemen şişen hava yastıkları sayısız hayat kurtarmışlardır. Şişen hava yastığı kazazadeye etki eden kuvveti yani impulsu azaltır.

Courtesy of Saab

Quick Quiz 9.5

İki cisim sürtünmesiz bir zemin üzerindedirler. Cisim₁ in kütlesi Cisim₂ den büyüktür. Cisim₁ e sabit bir kuvvet cisme d mesafesi boyunca ivmeli hareket yaptırır. Cisim₁ e uygulanan kuvvet kaldırılır ve Cisim₂ ye uygulanırsa Cisim₂ de d mesafesi boyunca ivmeli hareket yapar. Bu bilgilere göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur? (p ler momentumu, K lar kinetik enerjileri göstermektedir)

- (a) $p_1 < p_2$
- (b) $p_1 = p_2$
- (c) $p_1 > p_2$
- (d) $K_1 < K_2$
- (e) $K_1 = K_2$
- (f) $K_1 > K_2$

Quick Quiz 9.6

İki cisim sürtünmesiz bir zemin üzerindedirler. Cisim₁ in kütlesi Cisim₂ den büyüktür. Cisim₁ e sabit bir kuvvet Δt süresince uygulanırsa cisim bu süre içinde ivmeli hareket yapar. Cisim₁ e uygulanan kuvvet kaldırılır ve Cisim₂ ye Δt süresi kadar uygulanırsa Cisim₂ de bu süre içinde ivmeli hareket yapar. Bu bilgilere göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- (a) $p_1 < p_2$
- (b) $p_1 = p_2$
- (c) $p_1 > p_2$
- (d) $K_1 < K_2$
- (e) $K_1 = K_2$
- (f) $K_1 > K_2$

Quick Quiz 9.7

Bir arabada çarpışma esnasında ön konsol, emniyet kemeri ve hava yastığı tarafından ön tarafta oturan bir yolcunun

- (a) İmpulsundaki değişimi ve
- (b) Üzerine etkiyen ortalama kuvveti

Büyükten küçüğe doğru sıralıyınız.

Örnek 9.3 İlk vuruş

50 g lık bir golf topuna golf sopası ile vurulmaktadır. Topa etki eden kuvvet sıfırdan bir maksimum bir değere kadar çıkmakta ve sonra tekrar sıfırlanmaktadır. Kuvvet-zaman eğrisi şekilde verilmektedir. Top 200 m lik bir mesafeye giderse sopanın topa çarpma anındaki topun impulsunu hesaplayınız.

© Harold and Esther Edgerton Foundation 2002,
courtesy of Palm Press, Inc.

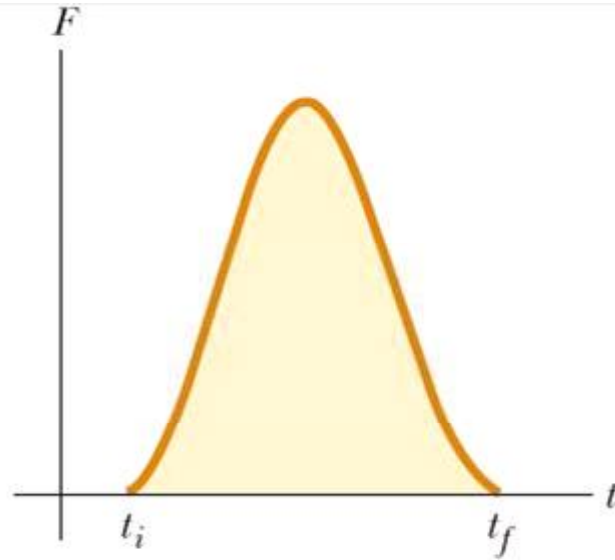


Ortalama kuvvet

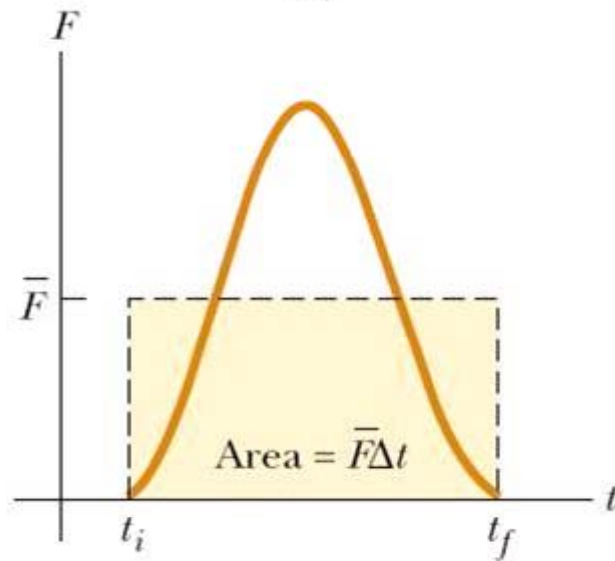
$$\bar{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\mathbf{I} \equiv \bar{\mathbf{F}} \Delta t$$



(a)



(b)

Golf topunun impulsu

Golf topunun impulsu

$$v_i = v_A = 0$$

$$v_f = v_B$$

$$\begin{aligned} I = \Delta p &= mv_B - mv_A = (50 \times 10^{-3} \text{ kg})(44 \text{ m/s}) - 0 \\ &= 2.2 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

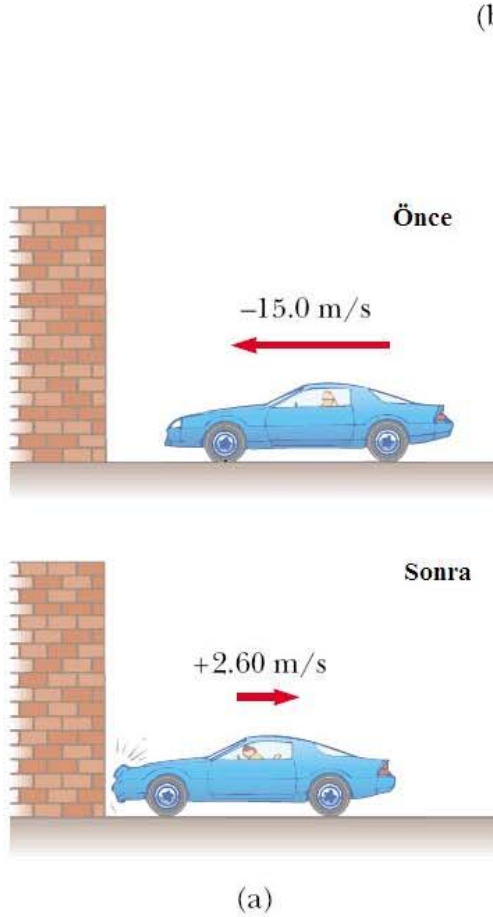
Topa etki eden ortalama kuvvet aşağıdaki gibidir:

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2.2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0.01 \text{ s}} = 2 \times 10^2 \text{ N}$$

Örnek 9.4 Araba tamponları ne kadar iyidir?

Bir araba çarpma testinde 1 500 kg lık araba duvara çarpmaktadır (Şekil 9.6). Arabanın ilk ve son hızları $v_i = -15.0\mathbf{i}$ m/s ve $v_f = 2.60\mathbf{i}$ m/s şeklindedir. Çarpma 0.150 saniye kadar sürmektedir. Çarpmanın neden olduğu impulsu ve arabaya etki eden ortalama kuvveti hesaplayınız.

Şekil 9.6 (a) Çarpmayla arabanın momentumunda değişme olmaktadır. (b) Çarpışma testinde arabanın başlangıçtaki kinetik enerjisinin çoğu arabanın zarar görmesine harcanır.



Örnek 9.4 Araba tamponları ne kadar iyidir?

Çözüm:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0 - (-2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \\ &= 2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg} \cdot \text{m/s}\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4 \hat{\mathbf{i}} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = 1.50 \times 10^5 \hat{\mathbf{i}} \text{ N}$$

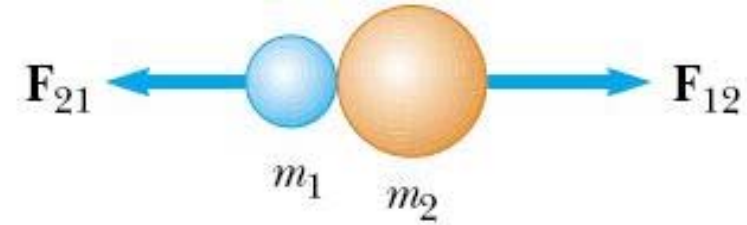
9.3 Tek Boyutta çarpışmalar

Çizgisel momentumun korunumunu iki parçacık çarpışınca neler olabileceğini anlamak için kullanacağız. Çarpma, iki parçacık birbirlerine çok yaklaşarak birbirlerine kuvvet etkimeleri şeklinde kullanılacaktır. Parçacıkların ilk ve son hızları arasındaki değişme suresi çok kısadır. Parçacıkların birbirlerine etkidikleri kuvvet diğer dış kuvvetlerden (kütlesel çekim, elektrik vs.) ok büyük kabul edilir ve impulsu yaklaşık olarak alırız. İki parçacık arasındaki fiziksel kontak iki makroskopik cisim arasında olmaktadır (şekil 9.7a). Mikroskopik düzeyde fiziksel kontak yoktur.

9.3 Tek Boyutta çarpışmalar

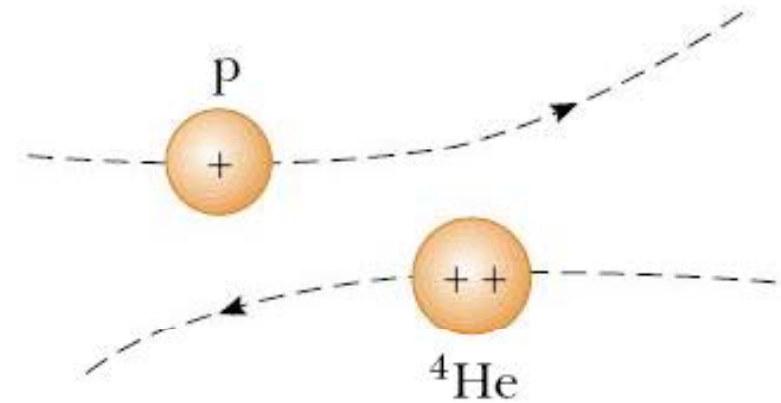
Bunu anlayabilmek için atomik düzeyde proton ve alfa (helyum atomunun çekirdeği) parçacıklarının çarpışmalarını dikkate alalım (şekil 9.7b). Her iki parçacık pozitif elektrik yüklü olduklarından birbirlerine yakınlaşınca birbirlerini statik elektrik alanlarından dolayı kuvvetli bir şekilde iterler. Fiziksel bir kontak olmaz. Kütleleri m_1 ve m_2 iki parçacık çarpışmaktadır (şekil 9.7). Impuls kuvvetleri şekil 9.4 teki gibi değişmektedir. Parçacıklar arası etkileşmeler iç kuvvetlerin etkileşmesidir. İki parçacık izole edilmiş durumdadır. Momentum korunmaktadır. **arpışmadan önceki toplam momentum ile çarpışmadan sonraki toplam momentum birbirlerine eşittir.**

9.3 Tek Boyutta çarpışmalar



(a)

şekil 9.7 (a) İki cisim arasındaki çarpışmada doğrudan temas vardır. (b) İki yüklü parçacık arasındaki “arpışma”.



(b)

Elastik arpışma

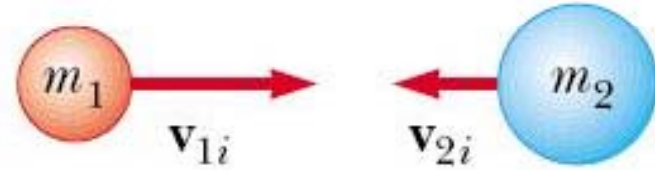
Buna karşın, çarpma olayının tipine bağlı olarak parçacıklardan oluşan bir sistemin toplam kinetik enerjisi bazen korunur bazende korunmaz. Kinetik enerjinin bu durumuna göre çarpışma elastik veya inelastik çarpışma olarak isimlendirilir.

Elastik çarpışmada iki cisimden birisinin toplam kinetik enerjisi çarpışmadan önce ve çarpışmadan sonra aynıdır (yani toplam momentumu değişmez). Bu tür çarpışmalar makroskopik dünyada çoktur. Az da olsa enerji kaybı olmasına rağmen bilardo toplarının çarpışması elastik çarpışmaya örnek verilebilir. Bilardo toplarının çarpışmasında duyduğunuz ses bu enerji kaybından kaynaklanır. Tam elastik çarpışmada ses duyulmaz. Atomik ve alt atomik boyuttaki parçacıklar arasındaki çarpışmalar örnek verilebilir.

İnelastik çarpışma

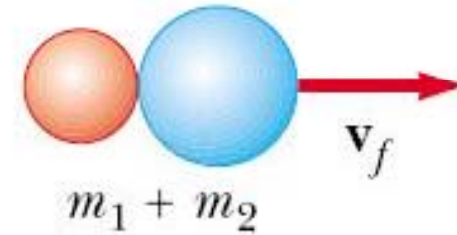
İnelastik çarpışmada sistemin çarpışmadan önceki enerjisi ile çarpışmadan sonraki enerjilesi (momentum korunmasına rağmen) aynı değildir. İki tip inelastik çarpışma vardır. Parçacıklar çarpışmadan sonra birleşir. Örnek olarak dünyaya çarpan bir meteor verilebilir.

Çarpışmadan önce



(a)

Çarpışmadan sonra



(b)

İnelastik arpışma

İnelastik çarpışan cisimler birbirleri ile birleşmez, fakat çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjileri eşit değildir. Plastik bir topun sert bir yüzeye çarpması bu tür bir inelastik çarpışmaya örnek verilebilir. Plastik top çarpışma esnasında biraz şekil değiştirir. Kinetik enerjideki farklılık bu şekil değiştirme için harcanır. Sistemin kinetik enerjisi korunmaz. Enerjinin bir kısmı iç enerji olarak cisim içinde dağılırken bir kısımda ses olarak dağılır. Elastik ve gerçek inelastik çarpışma nadiren görülen olaylardır. Günlük hayatta karşılaştığımız çarpışma olaylarının çoğu bu iki tip arasındadır. arpışmaları ayıretmek için en uygun yol momentumun korunup korunmadığına bakmaktır.

Gerçek inelastik çarpışma

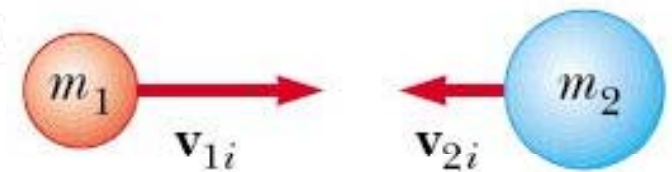
Çarpışmadan sonra birleşik hareket eden bir sistemin momentum korunumu aşağıdaki gibidir:

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f$$

Son hız aşağıdaki gibidir:

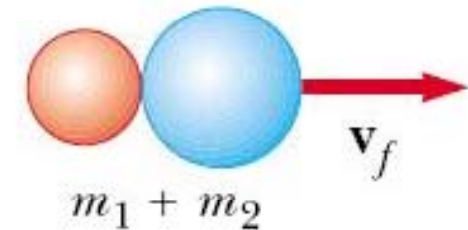
$$\mathbf{v}_f = \frac{m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Çarpışmadan önce



(a)

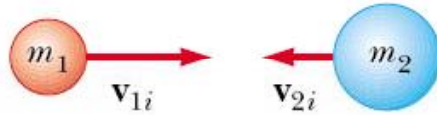
Çarpışmadan sonra



(b)

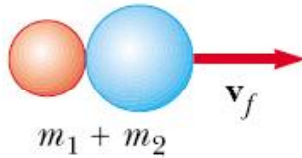
Elastik çarpışma

Çarpışmadan önce



(a)

Çarpışmadan sonra



(b)

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

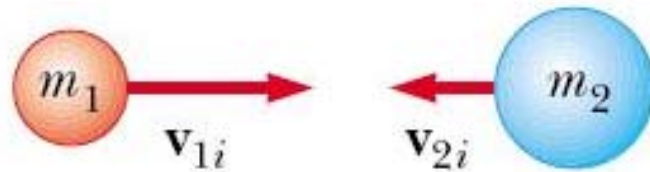
$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

m_1 ve m_2 kütleli iki cisim aynı çizgi üzerinde birbirine doğru v_{1i} ve v_{2i} başlangıç süratleri ile ilerlemektedirler. İki cisim kafa kafaya çarpışırlar ve birbirlerinden v_{1f} ve v_{2f} süratleri ile uzaklaşırlar. Çarpışma elastik ise sistemin kinetik enerjisi ve momentumu korunur.

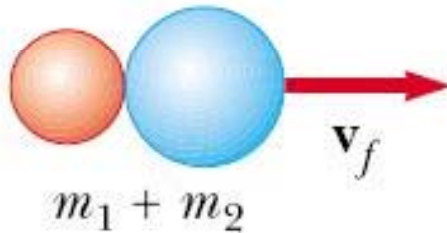
Elastik çarpışma

Çarpışmadan önce



(a)

Çarpışmadan sonra



(b)

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

Elastik arpışma

Eğer m_1 in kütlesi m_2 den çok büyük ve $v_{2i} = 0$ ise, yukarıdaki denklemlerden $v_{1f} \approx v_{1i}$ ve $v_{2f} \approx 2v_{1i}$ bulunur . Bunun anlamı çok ağır bir kütle çok hafif bir kütle ile kafa kafaya arpışırsa ağır kütle hareketinde bir değişiklik olmadan ilerlemeye devam eder, hafif kütle ise ağır kütlein ilk süratini iki katına çıkar demektir. Ağır bir atomun hafif bir atomla örneğin uranyum atomunun hidrojen atomu ile çarpışması verilebilir.

Eğer m_2 kütlesi m_1 den çok büyük ve 2 nolu parçacık çarpışmadan önce durgun ise çarpışmadan sonra $v_{1f} \approx -v_{1i}$ ve $v_{2f} = 0$ olur. Bunun anlamı hafif bir parçacık başlangıçta durgun olan ağır bir parçacıkla kafa kafaya arpışırsa hafif kütle geldiği yönün tam tersi yönünde aynı süratle hareket ederken ağır kütle yine hareketsiz kalır.

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

Quick Quiz 9.8

İki cisim arasında gerçek bir inelastik tek-boyuttaki çarpışmada sistemin orijinal kinetik enerjisi çarpışmadan sonra değişiyorsa bu durumda aşağıdaki koşullardan hangisi önemlidir?

- (a) Nesnelerin momentumları çarpışmadan sonrada aynı büyüklükte fakat zıt yönde olmalıdır.
- (b) Cisimlerin kütleleri aynı olmalıdır.
- (c) Cisimlerin hızları aynı olmalıdır.
- (d) Cisimlerin süratleri aynı fakat zıt yönlerde hızlara sahip olmalıdır.

Quick Quiz 9.9

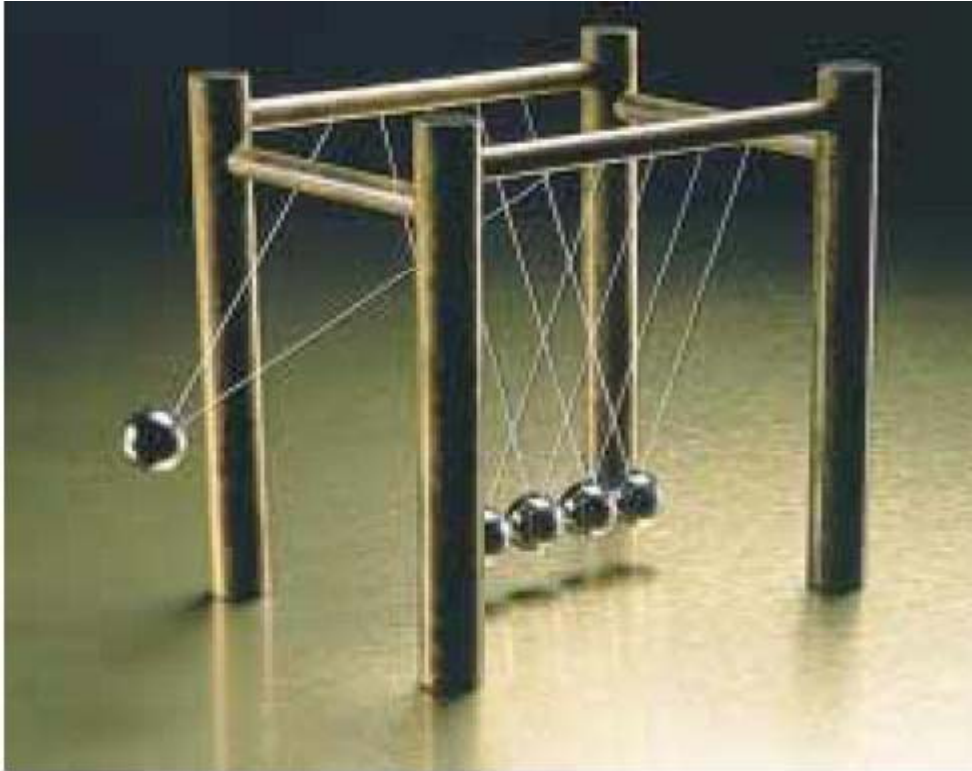
Bir masa tenisi topu durgun haldeki bowling topuna fırlatılır. Tenis topu bowling topuna çarpar ve geldiği yöne zıt yönde hareketine devam eder. Çarpışmadan sonra masa tenisi topunun hareketini bowling topuna göre hareketi incelenirse,

- (a) Çarpışmadan önceki momentumundan daha büyük ve daha fazla kinetik enerjiye sahiptir.
- (b) Momentumu azalmış fakat kinetik enerjisi artmıştır.
- (c) Momentumu artmış fakat kinetik enerjisi azalmıştır.
- (d) Momentumu ve kinetik enerjisi azalmıştır.
- (e) Momentumu ve kinetik enerjisi değişmez.

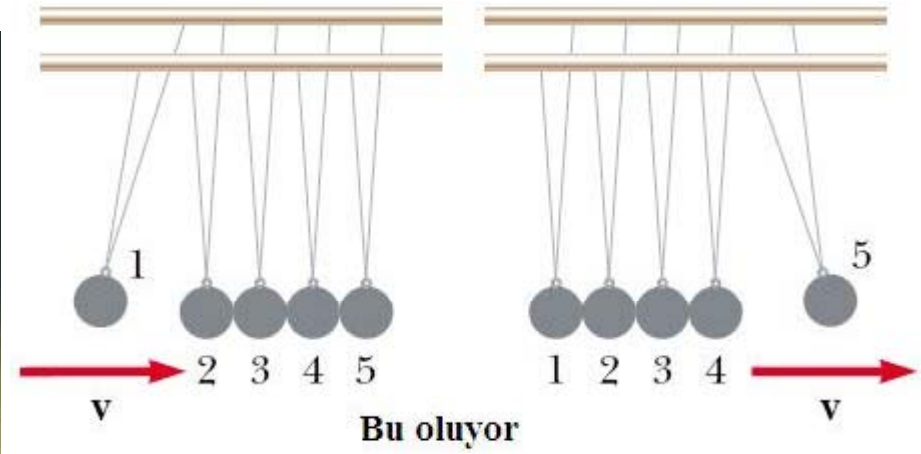
Örnek 9.5 Çarpışan toplar

Momentum ve kinetik enerjinin korunumuna güzel bir örnek şekilde verilmektedir. Sistem 5 tane aynı kütle ve sertliğe sahip çelik küreden oluşmaktadır. Çelik küreler aynı uzunlukta top ipleriyle sistemin üst kısmına bağlanmıştır. 1 nolu top diğerlerinden biraz açılıp serbest bırakılırsa 2 nolu topa neredeyse elastik çarpışma yapar. 2 nolu top 3 nolu topa kendisine 1 nolu toptan aktarılan momentumu aktarır. 3 nolu top 4 e ve 4 nolu topta 5 nolu topa bu momentumu fazla kayıp olmadan aktarır. Böylece 5 nolu top 1 nolu topun açıldığı açı kadar zıt yönde açılır. 1 nolu topun açılıp bırakılması ile 4 ve 5 nolu topların zıt yönde 1 nolu topun süratinin yarısı kadar değere ulaşip ulaşamayacaklarını (Şekil e bakınız) hesaplayınız.

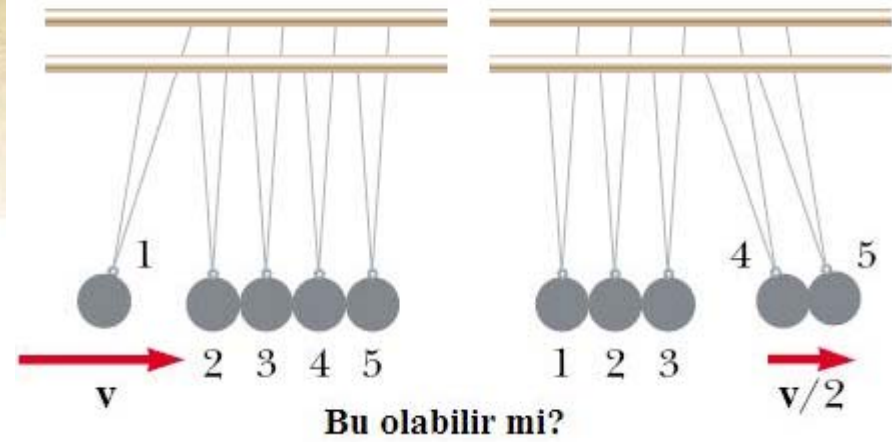
Örnek 9.5 Çarpışan toplar



(a)



(b)



(c)

Çarpışan çelik küreler

Çarpışma elastik ise böyle bir olay oluşmaz. Çarpışmadan önceki momentum mv dir. Buradaki m çelik topun kütlesi, v ise 1 nolu topun süratidir. Çarpışmadan sonra herbirinin kütlesi m olan iki topun $v/2$ sürati ile hareket edip etmeyeceklerini tahmin etmeye çalışıyoruz. Çarpışmadan sonra sistemin momentumunun $m(v/2) + m(v/2) = mv$ olmalıdır. Böylece sistemin momentumu korunur. Çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjilerde korunması gerekmektedir:

Sistemin başlangıçtaki enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

Sistemin çarpışmadan sonraki enerjisi :

$$K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

Yukarıdaki ifadelerden görüleceği gibi kinetik enerji korunmamaktadır. Böyle bir olayın yani iki kütlenin birlikte hareketinin gerçekleşmesi zordur.

Örnek 9.6 Trafik kazası.

1 800-kg lık bir araba trafik ışığında durmaktadır. Fakat arkasından gelen 900-kg lık 20.0 m/s süratle hareket eden bir araba ışıkta duran bu arabaya arkasından çarpar. İki araba çarpışmadan sonra birlikte düz bir çizgi üzerinde hareket ederler. Arabaların çarpışmadan sonraki birleşik hareketlerinin hızını hesaplayınız.

Çözüm Sorudaki birleşik kelimesi önemlidir. Bu cisimlerin inelastik çarpışma yaptıklarını söylemektedir. Arabaların son süratlerinin 20.0 m/s olduğunu kabul edebiliriz. İzole sistemin çarpışmadan önceki momentumunun çarpışmadan sonraki momentuma eşit olduğunu yazabiliriz. Sistemin çarpışmadan önceki toplam momentumu küçük arabanın momentumuna eşittir. Büyük kütleli araba durgundur.

Örnek 9.6 Trafik kazası.

Çarpışmadan önceki momentum

$$p_i = m_1 v_i = (900 \text{ kg}) (20.0 \text{ m/s}) = 1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Çarpışmadan sonraki momentum

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2\,700 \text{ kg}) v_f$$

Çarpışmadan önceki ve sonraki momentumlar son hızı bulmak için eşitlenirse aşağıdaki ifade elde edilir:

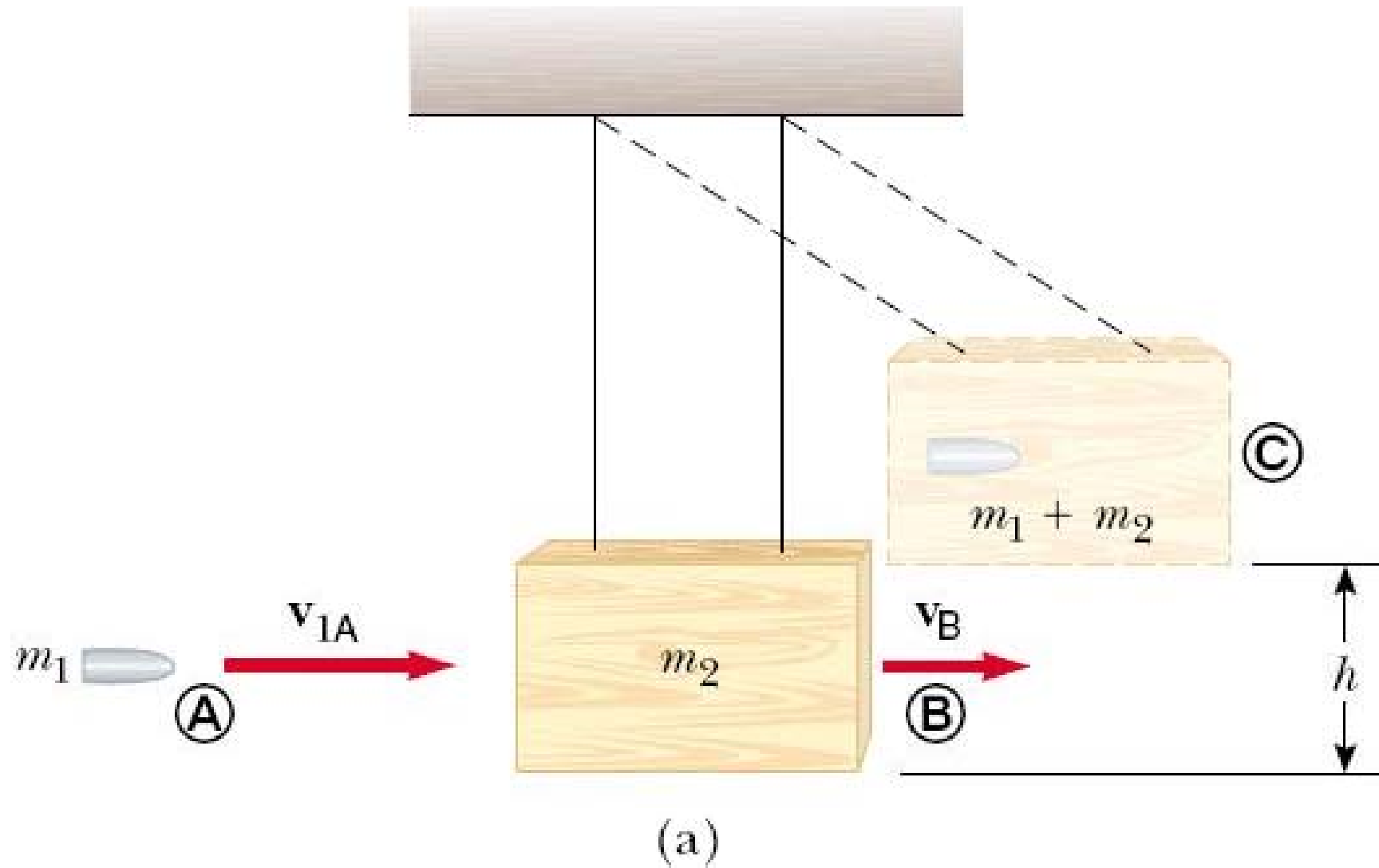
$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2\,700 \text{ kg}} = 6.67 \text{ m/s}$$

Örnek 9.7 Balistik sarkaç

Balistik sarkaç ile hızlı hareket eden cisimlerin örneğin merminin sürati ölçülebilir. Kütlesi m_1 olan mermi kütlesi mermiye göre çok büyük olan hafif iplerle tavana asılmış m_2 kütlesine ateş edilir. Mermi bu kütleye sapalanarak birlikte hareket ederek birlikte h kadar yükselirler. Bu verilerden yararlanarak merminin süratini hesaplayınız.

Çözüm Olayın resmi şekildeki gibidir. A çarpışmadan önceki durumu, B çarpışmadan sonraki durumu göstermektedir. Mermi ve kütle çevresinden izole edilmiş bir sistemdir. Sistemin momentumu korunmaktadır. Çarpışma inelastiktir. Problemi çözmek için impuls yöntemi kullanılır. $v_{2A} = 0$

Örnek 9.7 Balistik sarkaç



Örnek 9.7 Balistik sarkaç

Şekil 9.11 Balistik sarkaç ile hızlı hareket eden cisimlerin örneğin merminin sürati ölçülebilir.

Courtesy of Central Scientific Company



(b)

Örnek 9.7 Balistik sarkaç

$$(1) \quad v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

Mekanik enerji ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

$$(2) \quad K_B = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$$

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$U_B = 0 \quad U_C = (m_1 + m_2)gh$$

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gh}$$

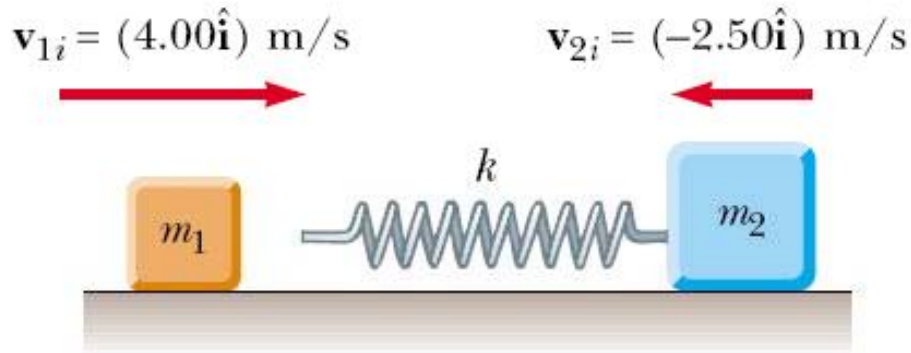
Örnek 9.8 Aralarında yay olan iki kütlenin çarpışması

Kütlesi $m_1 = 1.60$ kg olan ve 4.00 m/s süratle sağa doğru sürtünmesiz düz bir yüzey üzerinde hareket ederek önünde yay olan $m_2 = 2.10$ kg kütleli bir cisim sola doğru hareket etmektedir (Şekil 9.12a). Yay sabiti 600 N/m dir.

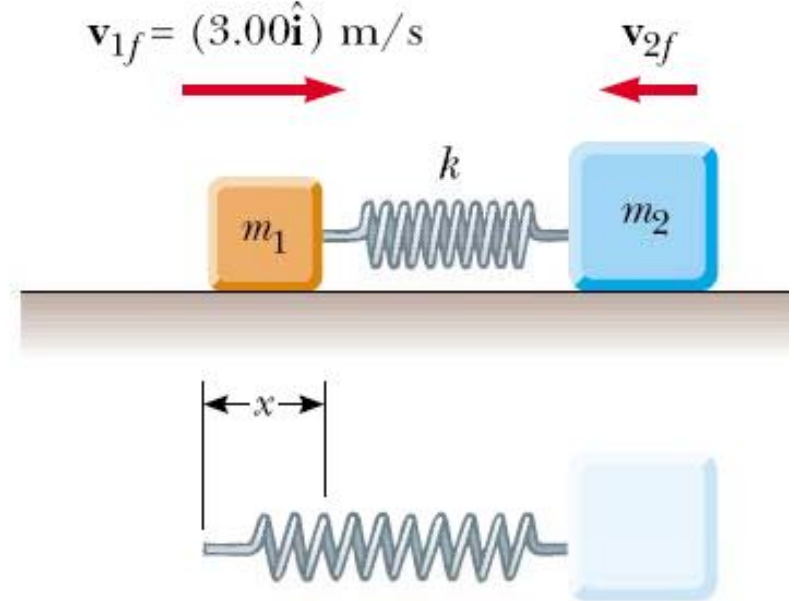
(A) Çarpışmadan sonra iki kütlenin hızını hesaplayınız.

(B) Çarpışma anında bir an için 1 nolu blok sağa doğru 3.00 m/s lik hızla hareket ettiğini kabul ederek (Şekil 9.12b) 2 nolu bloğun hızını hesaplayınız.

(C) yayın sıkışma miktarını hesaplayınız.



(a)



(b)

Örnek 9.8 Aralarında yay olan iki kütlenin çarpışması

(A)

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s})$$

$$= (1.60 \text{ kg})v_{1f} + (2.10 \text{ kg})v_{2f}$$

$$(1) \quad 1.15 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (1.60 \text{ kg})v_{1f} + (2.10 \text{ kg})v_{2f}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

$$4.00 \text{ m/s} - (-2.50 \text{ m/s}) = -v_{1f} + v_{2f}$$

$$(2) \quad 6.50 \text{ m/s} = -v_{1f} + v_{2f}$$

Örnek 9.8 Aralarında yay olan iki kütlenin çarpışması

2 nolu denklem 1.60 kg ile çarpılırsa

$$(3) \quad 10.4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = -(1.60 \text{ kg}) v_{1f} + (1.60 \text{ kg}) v_{2f}$$

1 nolu ve 3 nolu denklemler toplanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$11.55 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (3.70 \text{ kg}) v_{2f}$$

$$v_{2f} = \frac{11.55 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{3.70 \text{ kg}} = 3.12 \text{ m/s}$$

1 nolu denklem kullanılırsa,

$$6.50 \text{ m/s} = -v_{1f} + 3.12 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = -3.38 \text{ m/s}$$

Örnek 9.8 Aralarında yay olan iki kütlenin çarpışması

(B)

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s})$$

$$= (1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg}) v_{2f}$$

$$v_{2f} = -1.74 \text{ m/s}$$

Sonuçtaki eksi işareti 2 nolu cismin sola doğru hareket ettiğini göstermektedir.

Örnek 9.8 Aralarında yay olan iki kütlenin çarpışması

(c)

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = 0.173 \text{ m}$$

Örnek 9.9 Çarpışan nötronların yavaşlatılması

Bir reaktördeki fizyon reaksiyonu sonucunda bir atom parçalanır ve hızlı nötronlar ortaya çıkar. Bu nötronların sürati 10^7 m/s dir ve bu süratlerinin 10^3 m/s nin altına düşürülmesi gerekmektedir. Bu süratte diğer fizyon reaksiyonu başlatılabilir. Nötronların sürati katı veya sıvı ortam için düşürülür ve bu ortamlara moderatör denir. Yavaşlatma işlemi elastik çarpışmalarla sağlanır. Yukarıdaki verileri kullanarak bir nötronun kinetik enerjisinin azalacağını gösteriniz. Bir moderatör hafif çekirdekli atomlardan oluşur, örneğin döteryum (ağır su, D_2O) veya karbon grafitler kullanılır.

Örnek 9.9 Çarpışan nötronların yavaşlatılması

m_m - moderatördeki atomun kütlesi

m_n - nötronun kütlesi

v_{ni} - nötronun başlangıç sürati

Nötronun çarpışmadan önceki kinetik enerjisi :

$$K_{ni} = \frac{1}{2}m_n v_{ni}^2$$

Nötronun çarpışmadan sonraki kinetik enerjisi :

$$\frac{1}{2}m_n v_{nf}^2$$

$$K_{nf} = \frac{1}{2}m_n v_{nf}^2 = \frac{1}{2}m_n \left(\frac{m_n - m_m}{m_n + m_m} \right)^2 v_{ni}^2$$

$$(1) \quad f_n = \frac{K_{nf}}{K_{ni}} = \left(\frac{m_n - m_m}{m_n + m_m} \right)^2$$

Örnek 9.9 Çarpışan nötronların yavaşlatılması

Moderatördeki atomların çarpışmadan sonraki kinetik enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$K_{mf} = \frac{1}{2} m_m v_{mf}^2 = \frac{2 m_n^2 m_m}{(m_n + m_m)^2} v_{ni}^2$$
$$(2) \quad f_m = \frac{K_{mf}}{K_{ni}} = \frac{4 m_n m_m}{(m_n + m_m)^2}$$

Toplam kinetik enerji korunduğuna göre,

$$f_n + f_m = 1$$

$$(m_m = 2m_n), \quad f_n = 1/9 \quad \text{ve} \quad f_m = 8/9$$

Nötronun enerjisinin %89 u moderatöre aktarılır.

9.4 İki-boyutta Çarpışmalar

Kesim 9.1 de izole edilmiş iki parçacıktan oluşan bir sistemin momentumu korunur. Bu parçacıkların birbirleri ile çarpışması sonucunda parçacıkların momentumlarının x, y, ve z bileşenleri korunur. Bilardo toplarının çarpışması düzlem üzerinde çarpışmadır. Bu çarpışma için momentum korunumu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

2 nolu cismi durgun ve 1 nolu cismin hareket ettiğini kabul edersek, $v_{2i} = 0$

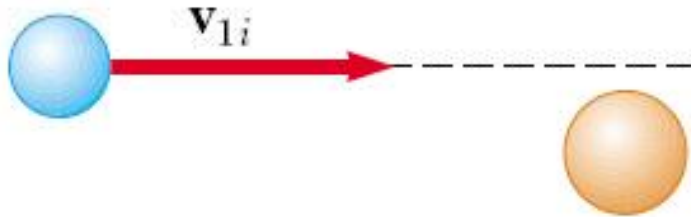
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi$$

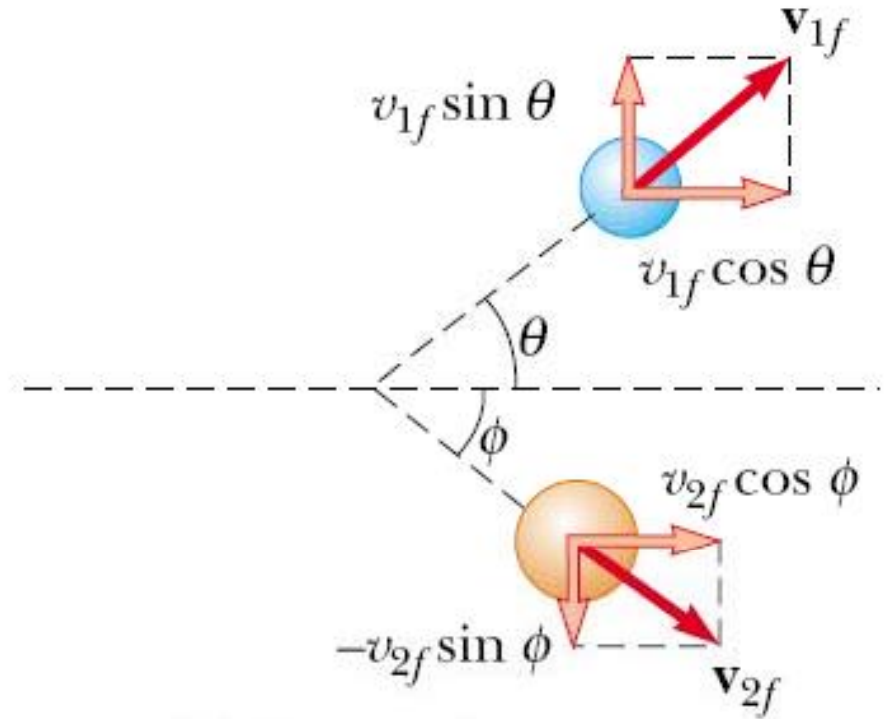
Kinetik enerjinin korunumundan,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

İki boyutta çarpışma



(a) Çarpışmadan önce



(b) Çarpışmadan sonra

9.4 İki-boyutta Çarpışmalar

1 nolu cismin hızını ve cisimlerin kütleleri biliniyorsa,

Bilinmeyenler,

$(v_{1f}, v_{2f}, \theta, \text{ ve } \phi)$

3 denklem ve 4 bilinmeyen karşımıza çıkar. Böyle bir denklem sistemini çözmek için bilinmeyenlerin sayısının azalması gerekmektedir. Çarpışma inelastik ise enerji korunumundan yararlanamayız.

İki-boyutta çarpışmalar

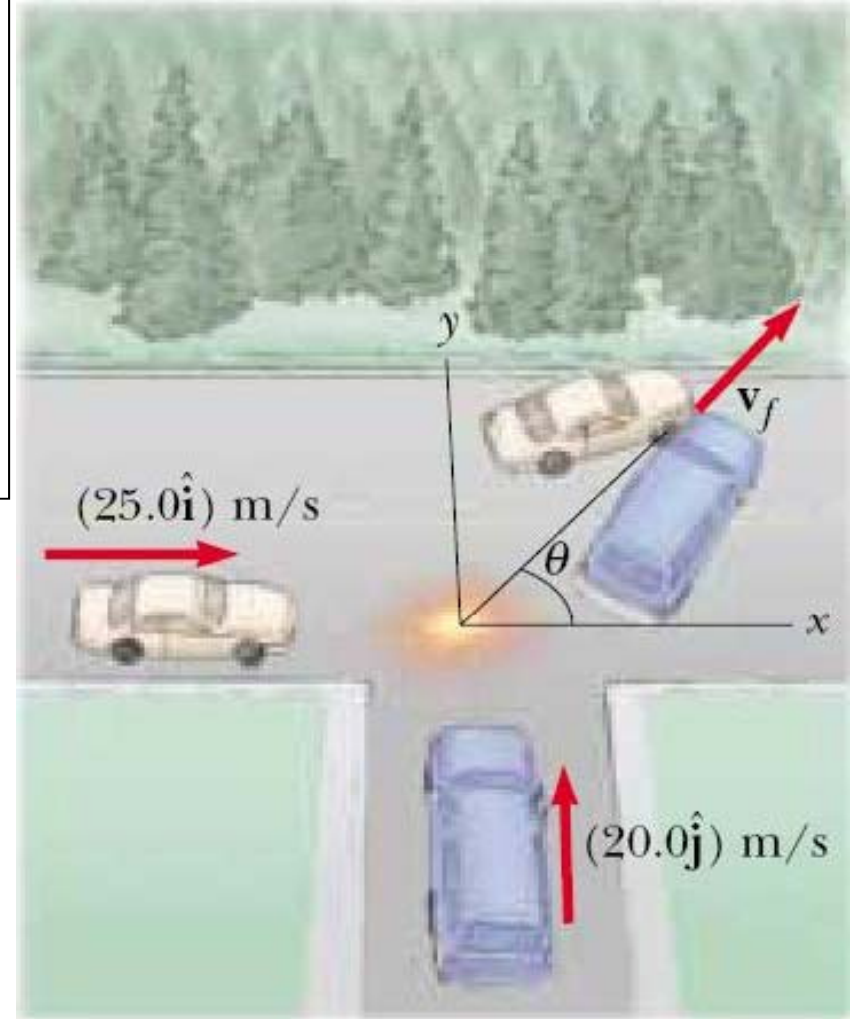
- Koordinat sistemini seçiniz ve hızları bu sisteme göre belirleyiniz. Başlangıç hızlarını x eksenine üzerine yerleştirmek daha kolay işlem yapmanızı sağlayabilir.
- Koordinat sistemini resimlerken cisimleri etiketleyiniz ve hız vektörlerini çizip belirtiniz.
- Cisimlerin çarpışmadan önceki ve sonraki momentumlarının x ve y bileşenlerini yazınız. Vektörlerin işaretlerine dikkat ediniz.
- Sistemin çarpışmadan önceki ve toplam momentumunun x eksenine ait bileşenlerini eşitleyiniz. Aynı işlemleri y eksenine bileşenleri içinde yapınız.
- Çarpışma inelastik ise kinetik enerji korunmaz. Bu yüzden fazladan bilgi içeren ifadeler gereklidir. Çarpışma mükemmel bir inelastik çarpışma ise cisimlerin çarpışmadan sonraki hızları aynıdır. Momentum eşitliğini bilinmeyenler için çözünüz.
- Çarpışma elastik ise sistemin çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjisi korunur. Bu ifadelerin eşitliği yazılarak denklem sistemi çözülecek hale gelir.

Örnek 9.10 Kavşakta iki arabanın çarpışması

1500-kg lık bir araba doğuya doğru 25.0 m/s süratle giderken bir yol kavşağında kuzeye doğru giden 20.0 m/s lik süratle giden 2500-kg lık bir araba ile çarpışır. Çarpışmadan sonra iki araba birlikte hareket ettiklerine göre bu hareketin yönünü ve hızın büyüklüğünü hesaplayınız. Çarpışmayı mükemmel inelastik çarpışma olarak ele alıp birlikte yapışık olarak hareket ettiklerini kabul ediniz.



Video için yukarıyı tıklayınız



Örnek 9.10 Kavşakta iki arabanın çarpışması

Çarpışmadan önceki toplam momentum:

$$\sum p_{xi} = (1\,500\text{ kg})(25.0\text{ m/s}) = 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Çarpışmadan sonra arabalar birlikte hareket ederler.

Yatay eksenle yapılan açı θ dır.

$$\sum p_{xf} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos \theta$$

$$(1) \quad 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos \theta$$

$$\sum p_{yi} = \sum p_{yf}$$

$$(2) \quad 5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f \sin \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = 53.1^\circ \quad v_f = \frac{5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4\,000\text{ kg})\sin 53.1^\circ} = 15.6\text{ m/s}$$

Örnek 9.11 Proton-proton çarpışması

Biri durgun diğeri hareketli iki proton birbiri ile çarpışmaktadır. Hareketli protonun çarpışmadan önceki sürati $3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$ ve bu çarpışma elastik çarpışma şeklindedir. Protonlar birbirlerine yaklaşıncaya elektrostatik itme kuvveti uygularlar. Çarpışmadan sonra protonlardan biri yatay eksenle 37.0° açı yapacak şekilde hareket eder ve ikinci proton yatay eksenle ϕ açısı yapacak şekilde geri teper. Protonların çarpışmadan sonraki süratlerini ve ϕ açısını hesaplayınız.

$$m_1 = m_2, \theta = 37.0^\circ$$

$$v_{1i} = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$(1) \quad v_{1f} \cos 37^\circ + v_{2f} \cos \phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$(2) \quad v_{1f} \sin 37.0^\circ - v_{2f} \sin \phi = 0$$

$$(3) \quad v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.50 \times 10^5 \text{ m/s})^2 \\ = 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{2f} \cos \phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s} - v_{1f} \cos 37.0^\circ$$

$$v_{2f} \sin \phi = v_{1f} \sin 37.0^\circ$$

Proton-proton çarpışması

Önceki denklemlerin kareleri alınırsa

$$\begin{aligned}v_{2f}^2 \cos^2 \phi + v_{2f}^2 \sin^2 \phi \\&= 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 - (7.00 \times 10^5 \text{ m/s}) v_{1f} \cos 37.0^\circ \\&\quad + v_{1f}^2 \cos^2 37.0^\circ + v_{1f}^2 \sin^2 37.0^\circ \\v_{2f}^2 &= 1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5) v_{1f} + v_{1f}^2\end{aligned}$$

bu denklemlerde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}v_{1f}^2 + [1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5) v_{1f} + v_{1f}^2] \\&= 1.23 \times 10^{11}\end{aligned}$$

$$2v_{1f}^2 - (5.59 \times 10^5) v_{1f} = (2v_{1f} - 5.59 \times 10^5) v_{1f} = 0$$

$v_{1f} = 0$, elde edilir. Bu hareketli olan 1 nolu protonun çarpışmadan sonra durduğunu ve 2 nolu protonun ise harekete başladığını belirtmektedir.

Proton-proton çarpışması

Bu sonuç bize doğru bilgi vermez. Aşağıdaki ifadeden 1 nolu protonun son sürati elde edilir:

$$2v_{1f} - 5.59 \times 10^5 = 0 \quad \longrightarrow \quad v_{1f} = 2.80 \times 10^5 \text{ m/s}$$

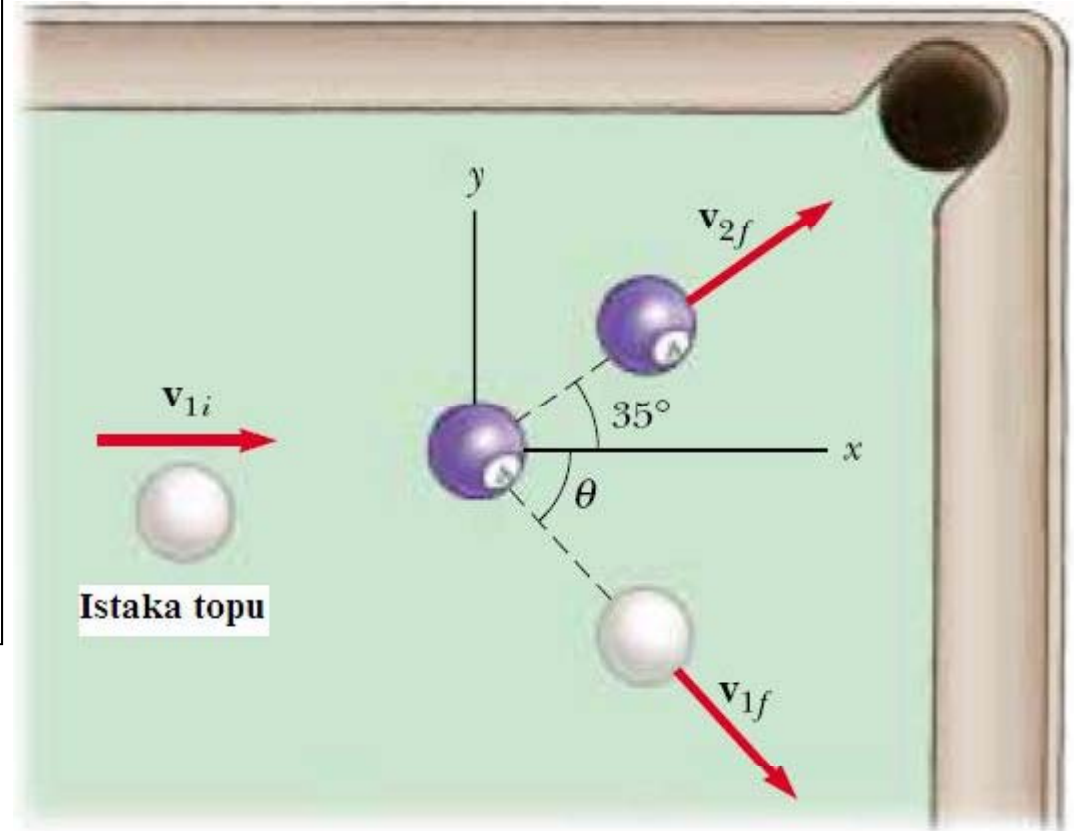
$$\begin{aligned} v_{2f} &= \sqrt{1.23 \times 10^{11} - v_{1f}^2} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - (2.80 \times 10^5)^2} \\ &= 2.12 \times 10^5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \sin^{-1} \left(\frac{v_{1f} \sin 37.0^\circ}{v_{2f}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{(2.80 \times 10^5) \sin 37.0^\circ}{2.12 \times 10^5} \right) \\ &= 53.0^\circ \end{aligned}$$

$\theta + \phi = 90^\circ$ Bu kazara elde edilen bir sonuç değildir. Eşit kütleli iki cisim elastik çarpışma yapıyor ve çarpışmadan önce kütlelerden biri durgun ise sonuç her zaman yukarıdaki gibidir. Çarpışmadan sonra cisimler birbirlerinden aralarındaki açı 90° olacak şekilde ayrılırlar.

Örnek 9.12 Bilardo toplarının çarpışması

In a game of billiards, a player wishes to sink a target ball in the corner pocket, as shown in Figure 9.15. If the angle to the corner pocket is 35° , at what angle θ is the cue ball deflected? Assume that friction and rotational motion are unimportant and that the collision is elastic. Also assume that all billiard balls have the same mass m .



Örnek 9.12 Bilardo toplarının çarpışması

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

$$m_1 = m_2 = m,$$

$$(1) \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

$$(2) \quad m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

$$v_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

$\mathbf{v}_{1f}$ ve $\mathbf{v}_{2f}$ arasındaki açı $\theta + 35^\circ$,

$$\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = v_{1f}v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$(3) \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$0 = 2v_{1f}v_{2f} \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$0 = \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$\theta + 35^\circ = 90^\circ \quad \text{or} \quad \theta = 55^\circ$$

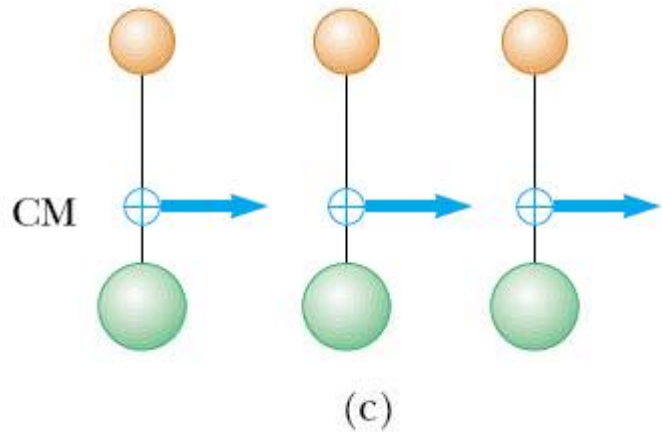
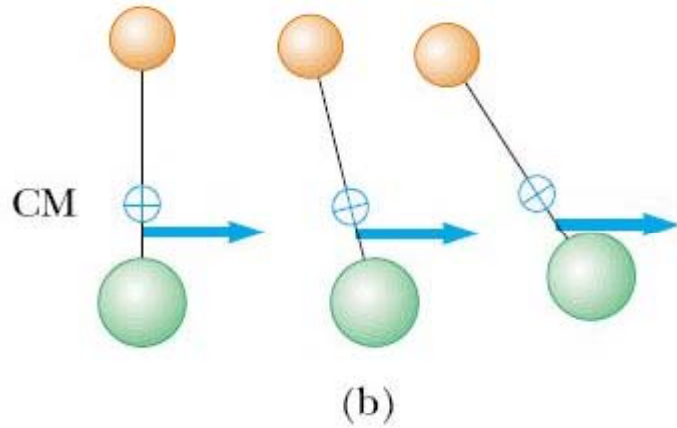
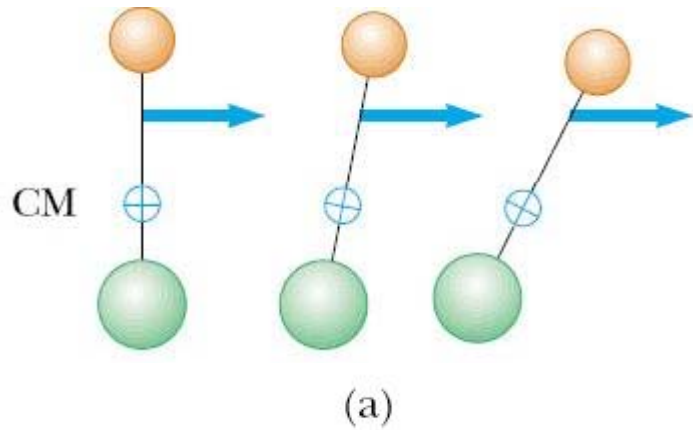
9.5 Kütle Merkezi

In this section we describe the overall motion of a mechanical system in terms of a special point called the center of mass of the system. The mechanical system can be either a group of particles, such as a collection of atoms in a container, or an extended object, such as a gymnast leaping through the air. We shall see that the center of mass of the system moves as if all the mass of the system were concentrated at that point. Furthermore, if the resultant external force on the system is ΣF_{ext} and the total mass of the system is M , *the center of mass moves with an acceleration given by $a = \Sigma F_{\text{ext}}/M$.* That is, the system moves as if the resultant external force were applied to a single particle of mass M *located at the center of mass. This behavior is independent of other motion, such as rotation or vibration of the system. This is the particle model that was introduced* in Chapter 2.

9.5 Kütle Merkezi

Consider a mechanical system consisting of a pair of particles that have different masses and are connected by a light, rigid rod (Fig. 9.16). The position of the center of mass of a system can be described as being the *average position of the system's mass*. The center of mass of the system is located somewhere on the line joining the two particles and is closer to the particle having the larger mass. If a single force is applied at a point on the rod somewhere between the center of mass and the less massive particle, the system rotates clockwise (see Fig. 9.16a). If the force is applied at a point on the rod somewhere between the center of mass and the more massive particle, the system rotates counterclockwise (see Fig. 9.16b). If the force is applied at the center of mass, the system moves in the direction of F without rotating (see Fig. 9.16c). Thus, the center of mass can be located with this procedure

9.5 Kütle Merkezi



Şekil 9.16 Farklı kütleli iki parçacık birbirlerine kütesiz ipe bağlıdır. (a) Kütle merkezi ile küçük kütleli cisim arasında bu sisteme kuvvet uygulanırsa sistem saat ibreleri yönünde döner. (b) Kuvvet kütle merkezi ile ağır kütle arasında bir noktaya kuvvet uygulanırsa sistem sistem saat ibrelerinin tersi yönünde döner. (c) Kuvvet kütle merkezine uygulanırsa sistem doğru bir çizgi üzerinde ilerler.

9.5 Kütle Merkezi

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_1 = 0, x_2 = d, \text{ ve } m_2 = 2m_1,$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{2}{3}d.$$

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

x_i - i nci parçacığın x koordinatı

$$M \equiv \sum_i m_i \text{ - Toplam kütle}$$

Diğer eksenler üzerindeki kütle merkezleri aşağıdaki gibidir:

$$y_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \quad \text{and} \quad z_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

9.5 Kütle Merkezi

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}}\hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}}\hat{\mathbf{j}} + z_{\text{CM}}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}}{M}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

i nci parçacığın konumu : $\mathbf{r}_i \equiv x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$

9.5 Kütle Merkezi

Although locating the center of mass for an extended object is somewhat more cumbersome than locating the center of mass of a system of particles, the basic ideas we have discussed still apply. We can think of an extended object as a system containing a large number of particles (Fig. 9.18). The particle separation is very small, and so the object can be considered to have a continuous mass distribution. By dividing the object into elements of mass (Δm_i with coordinates x_i, y_i, z_i , we see that the x coordinate of the center of mass is approximately

$$x_{\text{CM}} \approx \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

y_{CM} ve z_{CM} yukarıdakine benzer şekilde yazılabilir.

Kütle parçaları çok küçük seçilirse,

Δm_i yerine dm yazılırsa

$$x_{\text{CM}} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int y dm$$

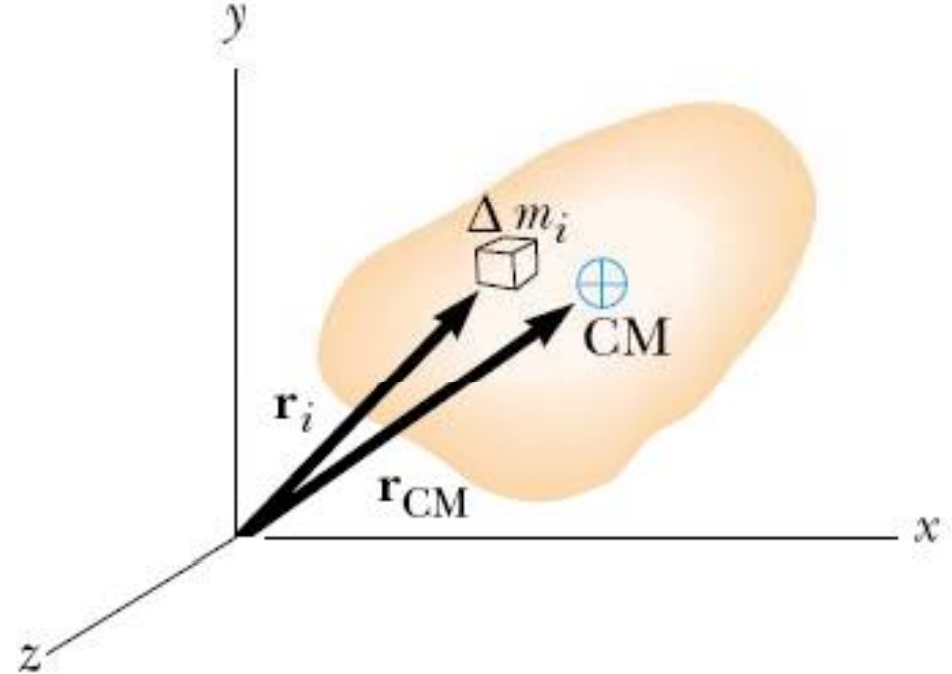
$$z_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int z dm$$

9.5 Kütle Merkezi

Şekil 9.18 Şekilsiz bir cismin çok küçük kütleli parçacıklardan (Δm_i) oluştuğunu kabul edelim. Bu küçük kütlenin koordinat merkezine uzaklığı x_{CM} , y_{CM} , ve z_{CM} koordinatlarından oluşan $\mathbf{r}_{CM}$ vektörü ile gösterilmektedir.

Kütle merkezinin konumu vektörel olarak gösterilebilir:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$$



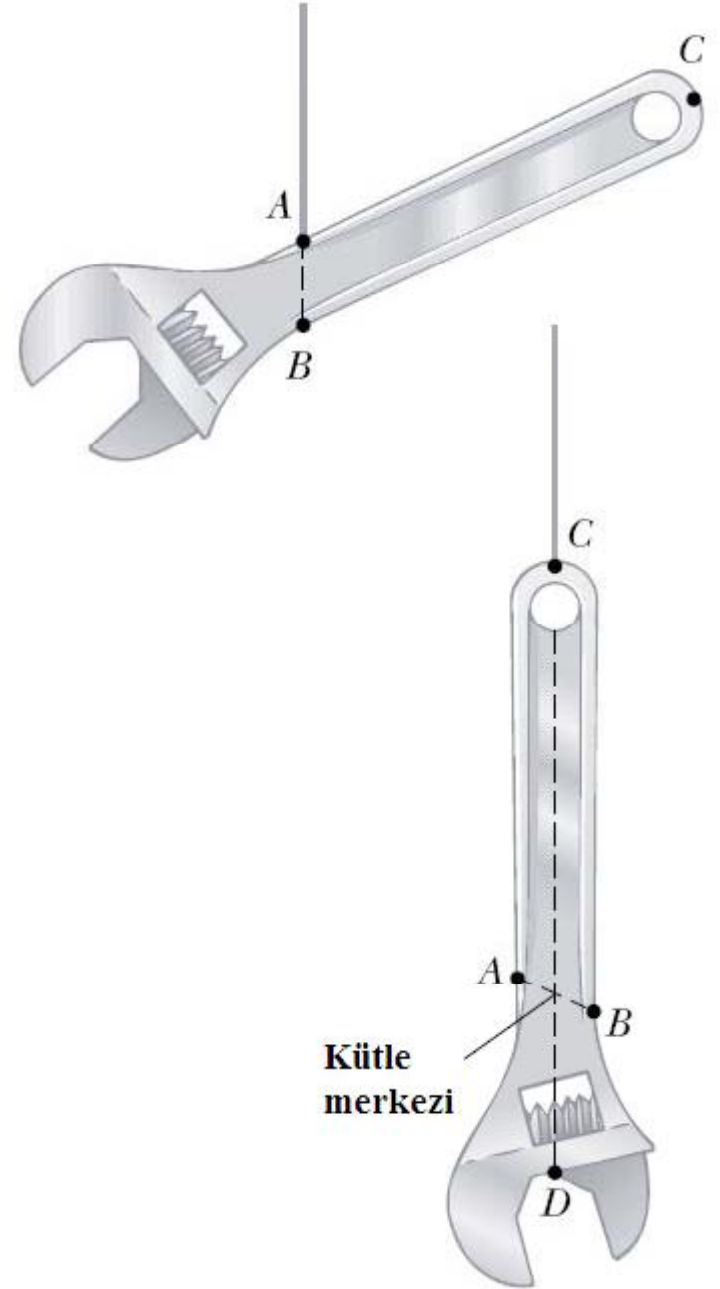
Kütle Merkezi

Simetrik bir cismin kütle merkezi simetri ekseninin üzerinde ve simetri düzleminin üzerindedir. Örneğin bir çubuğun kütle merkezi çubuğun tam ortasındadır. Küre veya bir kübün kütle merkezi geometrik merkezi üzerindedir.

Bitişik kütlelerden oluşan bir cismin her kütlesine yerçekimi kuvvetinin (mg) ayrı ayrı uygulandığını kabul edelim. Bu kütleler yerine cismin bir noktada toplanıp bu noktaya yerçekimi kuvvetinin uygulandığını kabul edersek bu noktaya ağırlık merkezi denir.

Kütle Merkezi

Şekil 9.19 Su anahtarının kütle merkezi yandaki şekillerde gösterilmektedir. Anahtar A veya C noktasından asılınca ağırlık merkezi bulunabilir. CD eksenini yine ağırlık merkezinin bulunduğu çizgidir.



Quick Quiz 9.10

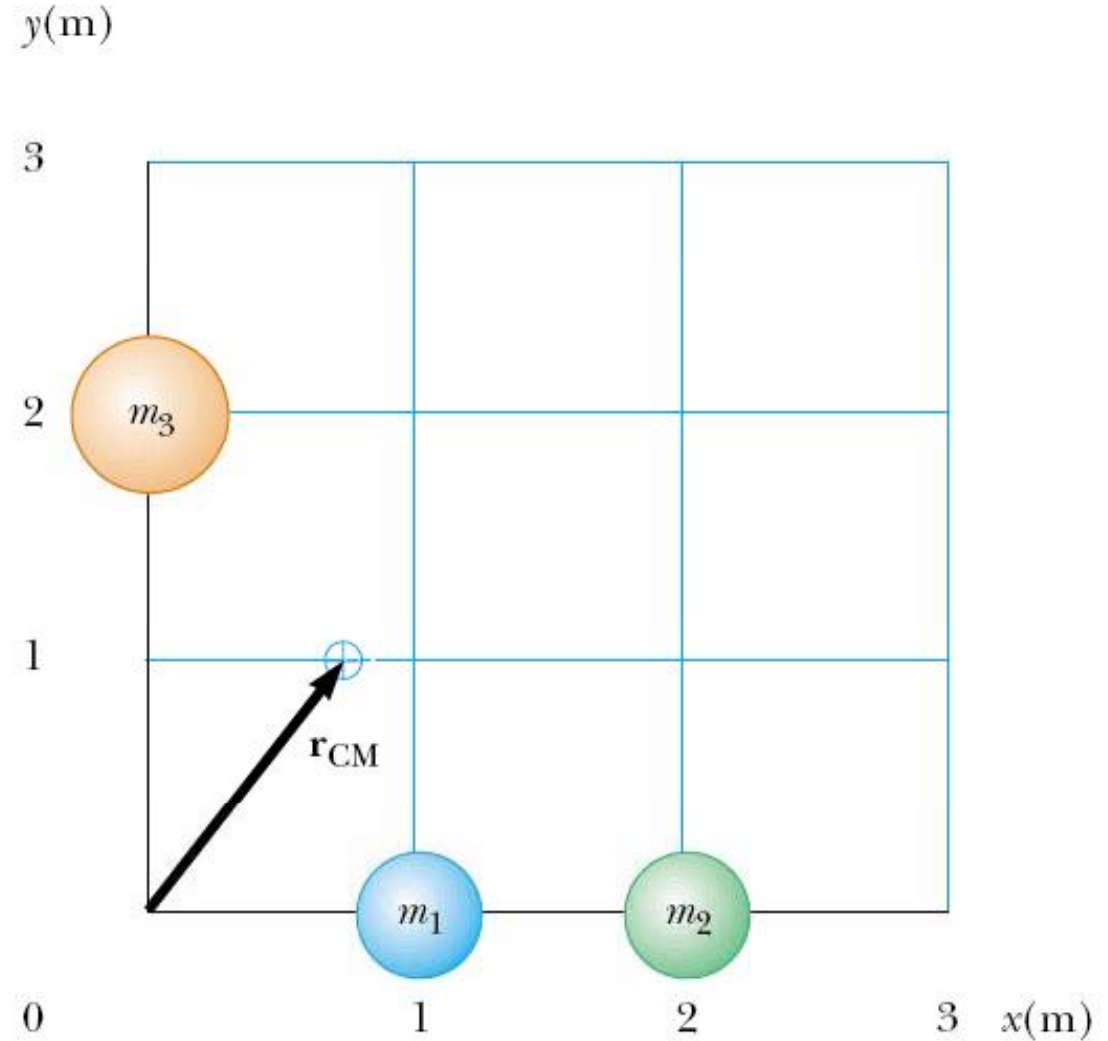
Bir beyzbol sopası kütle merkezinden şekildeki gibi ikiye ayrılırsa hangi tarafın kütlesi daha küçüktür?

- (a) Sağdaki parça
- (b) Soldaki parça
- (c) Her iki parçada aynıdır
- (d) Belirlenemez.



Örnek 9.13 Üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezi

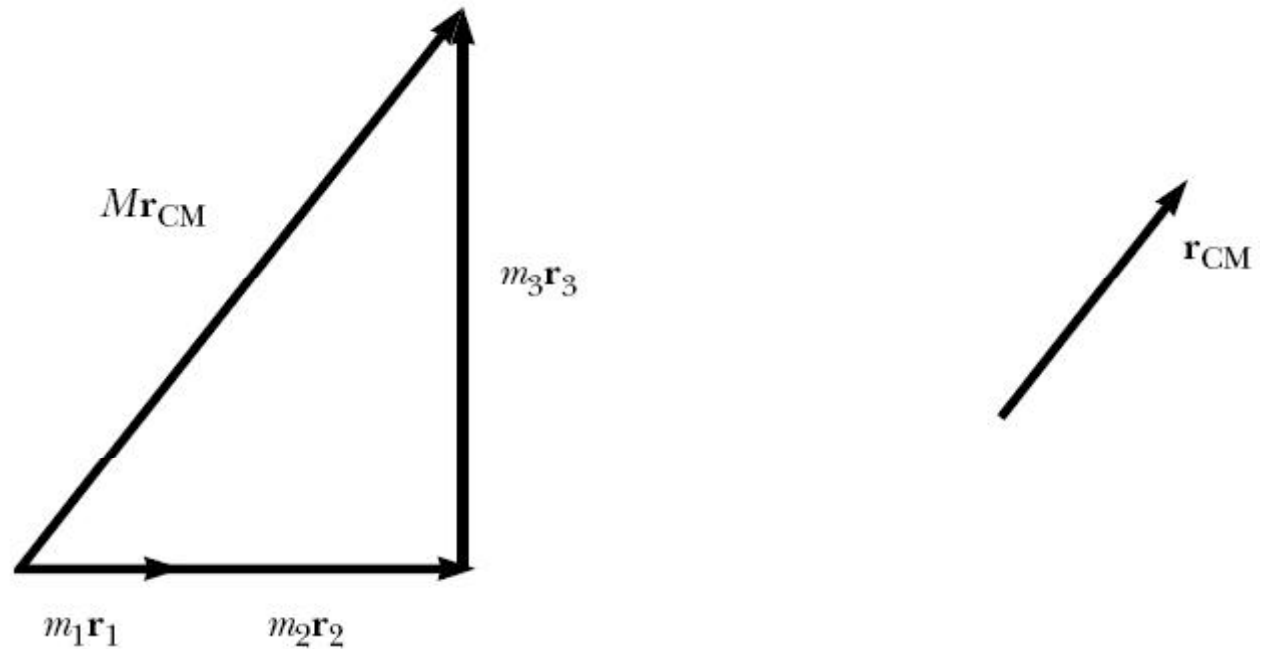
Şekildeki üç parçadan oluşan sistemin kütle merkezini belirleyiniz.



(a)

Örnek 9.13 Üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezi

Şekil 9.21 xample 9.13) (a)
Two 1.0-kg particles are
located on the x axis and a
single 2.0-kg particle is located
on the y axis as shown. The
vector indicates the location
the system's center of mass.
The vector sum of $m_i \mathbf{r}_i$ and
resulting vector for $\mathbf{r}_{CM}$.



(b)

Örnek 9.13 Üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezi

$$m_1 = m_2 = 1.0 \text{ kg} \quad m_3 = 2.0 \text{ kg}$$

$$z_{\text{CM}} = 0$$

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{(1.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (2.0 \text{ kg})(0)}{1.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}} \\ &= \frac{3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 0.75 \text{ m} \end{aligned}$$

Örnek 9.13 Üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezi

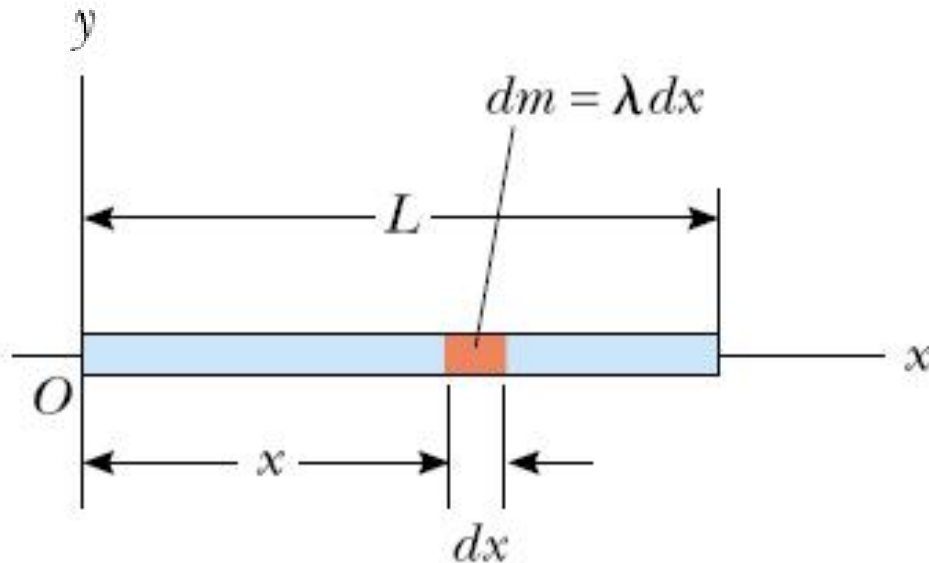
$$\begin{aligned} y_{\text{CM}} &= \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{(1.0 \text{ kg})(0) + (1.0 \text{ kg})(0) + (2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m})}{4.0 \text{ kg}} \\ &= \frac{4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 1.0 \text{ m} \end{aligned}$$

Kütle merkezi vektörel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \equiv x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} = (0.75 \hat{\mathbf{i}} + 1.0 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m}$$

Örnek 9.14 Bir çubuğun kütle merkezi

- (A)** Kütlesi M ve uzunluğu L olan kütle olarak düzgün dağılımlı bir çubuğun kütle merkezini hesaplayınız.
- (B)** Çubuğun düzgün dağılımlı bir kütleye sahip olmadığını kabul ederek kütlenin α - bir sabit olmak üzere $\lambda(x)=\alpha x$ ya göre değiştiğini kabul ederek çubuğun x eksenini üzerindeki kütle merkezini L ye bağlı olarak hesaplayınız.



Örnek 9.14 Bir çubuğun kütle merkezi

Simetriden aşağıdaki sonuç bulunabilir.

$$(A) \quad y_{\text{CM}} = z_{\text{CM}} = 0$$

Çizgisel kütle yoğunluğu : $\lambda = M/L$

$$dm = \lambda dx.$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx$$

$$= \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{L^2}{2M} \left(\frac{M}{L} \right) = \frac{L}{2}$$

Örnek 9.14 Bir çubuğun kütle merkezi

(B) $\lambda = \alpha x,$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx$$

$$= \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

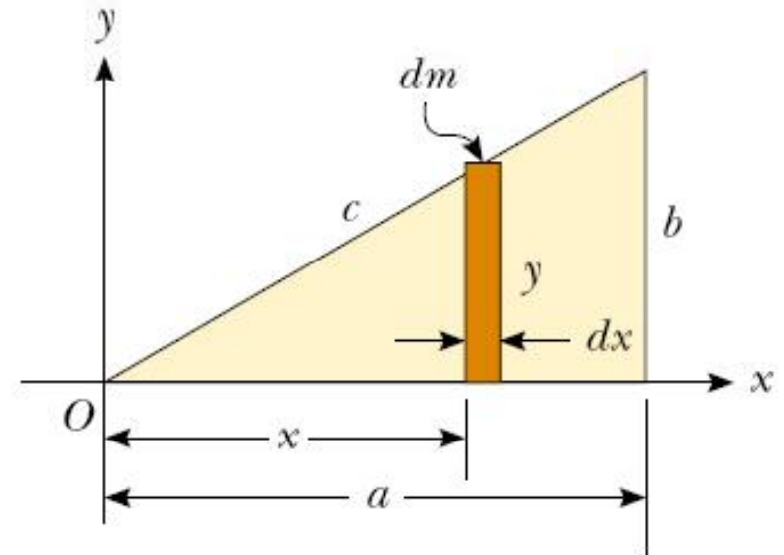
$$x_{\text{CM}} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L$$

Örnek 9.15 Katı bir dik üçgenin kütle merkezi

You have been asked to hang a metal sign from a single vertical wire. The sign has the triangular shape shown in Figure 9.23a. The bottom of the sign is to be parallel to the ground. At what distance from the left end of the sign should you attach the support wire?



(a)



(b)

Şekil 9.23 (a) Üçgen plaka bir telle asılmaktadır. (b) Kütle merkezini belirlemek için geometriden yararlanılır.

Örnek 9.15 Katı bir dik üçgenin kütle merkezi

Çözüm Tel, kütle merkezi ile aynı yerde olan ağırlık merkezinin hemen üstündeki bir noktadan geçirilmiştir. Üçgen levhanın düzgün yoğunluğa sahip ve toplam kütlelerinin M olduğunu kabul edelim. x boyuncaki kütle merkezinin yerini belirlemek için integral işlemi yapılır.

$$dm = \rho y t dx, \quad t - \text{metalın kalınlığı}$$

$$dm = \rho y t dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}abt} \right) y t dx = \frac{2My}{ab} dx$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^a x \frac{2My}{ab} dx = \frac{2}{ab} \int_0^a xy dx$$

$$y = (b/a)x.$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{2}{ab} \int_0^a x \left(\frac{b}{a} x \right) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3}a$$

Tel üçgenin alt kenarının sol tarafından $2/3$ kadar uzaktaki noktadan geçirilir. Levhanın kütle merkezinin y koordinatı benzer şekilde bulunur. Fakat burada buna gerek yoktur.

9.6 Parçacıklardan Oluşan Bir Sistemin Hareketi

We can begin to understand the physical significance and utility of the center of mass concept by taking the time derivative of the position vector given by Equation 9.30. From Section 4.1 we know that the time derivative of a position vector is by definition a velocity. Assuming M *remains constant for a system of particles, that is, no particles enter or leave the system*, we obtain the following expression for the velocity of the center of mass of the system:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}$$

$\mathbf{v}_i$ i nci parçacığın hızı

$$M\mathbf{v}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{\text{tot}}$$

9.6 Parçacıklardan Oluşan Bir Sistemin Hareketi

Therefore, we conclude that the total linear momentum of the system equals the total mass multiplied by the velocity of the center of mass. In other words, the total linear momentum of the system is equal to that of a single particle of mass M moving with a velocity $\mathbf{v}_{CM}$.

If we now differentiate Equation 9.34 with respect to time, we obtain the acceleration of the center of mass of the system:

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

Newton'un ikinci yasasından

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

9.6 Parçacıklardan Oluşan Bir Sistemin Hareketi

The forces on any particle in the system may include both external forces (from outside the system) and internal forces (from within the system). However, by Newton's third law, the internal force exerted by particle 1 on particle 2, for example, is equal in magnitude and opposite in direction to the internal force exerted by particle 2 on particle 1. Thus, when we sum over all internal forces in Equation 9.37, they cancel in pairs and we find that the net force on the system is caused *only by external* forces. Thus, we can write Equation 9.37 in the form

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{CM}}$$

Yani parçacıklardan oluşan bir sisteme etki eden bir dış kuvvet, sistemin toplam kütesinin ivmesi ile çarpımına eşittir. Bu durum Newton'un ikinci yasasının tek bir parçacık üzerine etki eden kuvvet ile karşılaştırılabilir.

Kütle merkezi

Parçacıklardan oluşan bir sistemin net bir dış kuvvetin etkisiyle hareketi bu sistemin sanki kütle merkezinde toplanmış ve kütlesi M olan bir cisme etkiyen net dış kuvvetin etkisiyle aynıdır.

$$M\mathbf{a}_{\text{CM}} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

$$M\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{sabit} \quad (\text{eğer } \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0)$$

Kütle merkezi



Şekil 9.24 Hızlı flaş fotoğrafı düz bir yüzey üzerinde ilerleyen su anahtarının hareketini göstermektedir. Su anahtarı üzerindeki beyaz nokta cisim dönse bile düz bir çizgi üzerinde ilerlediğini göstermektedir.

Quick Quiz 9.11

Bir tur gemisi sonraki hedefine ulaşmak istemektedir. Yolcular geminin süratini baş kısmından arka kısmına koşarak artırmayı düşünmektedirler. Gemidekiler geminin arkasına doğru koşarlarsa geminin süratini,

- (a) Önceki durumuna göre artar,
- (b) değişmez,
- (c) Önceki süratinden küçük olur,
- (d) belirlenemez.

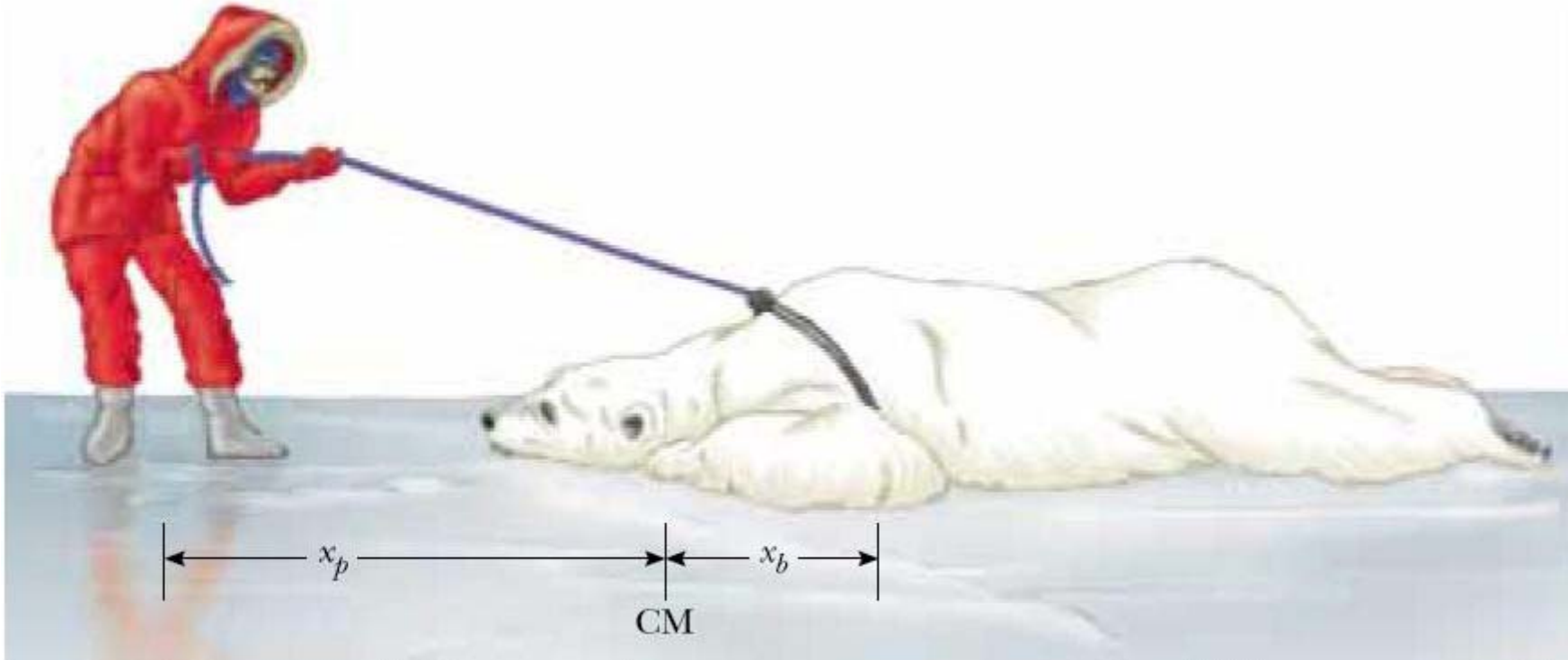
Quick Quiz 9.12

Önceki Quick Quiz 9.11 de yolcular geminin arka kısmına ulaşınca birden dururlarsa, geminin sürati

- (a) Koşmaya başlamadan öncekine göre fazladır
- (b) Koşmaya başlamadan önceki duruma göre bir değişmez
- (c) Koşmaya başlamadan önceki durumlarına göre sürati azalır
- (d) belirlenemez.

Örnek 9.16 Ayıyı çekmek

Bir araştırma için bir kutup ayısı buz üzerinde çekilmek istenmektedir. Kutup ayısının kütlesini metre, ip ve kendi kütlenizi kullanarak nasıl belirlersiniz?

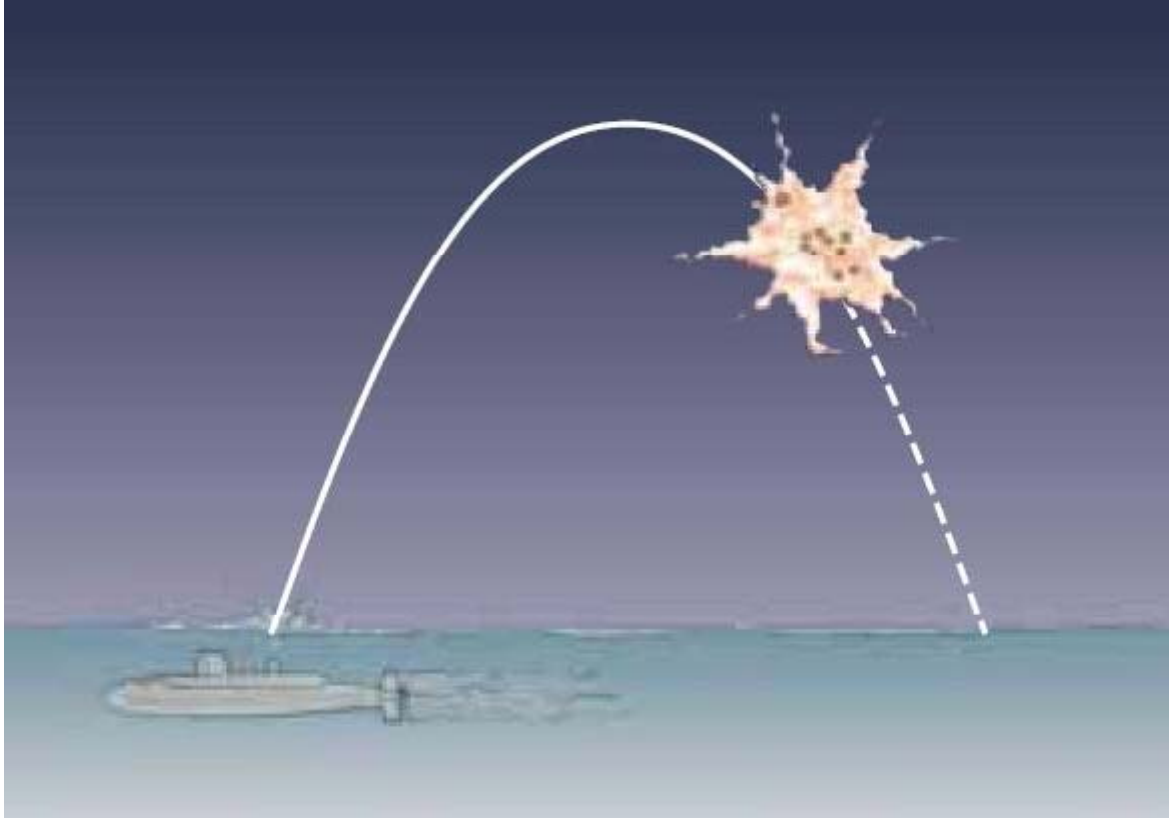


Kutup ayısının kütlesi

Çözüm İpi ayının etrafına dolayınız. Metre ile ayının konumunu bir noktaya göre ölçünüz. İpin diğer ucundan tutatarak kendi konumunuzu bu noktaya göre uzaklığını belirleyiniz. Kramponsuz ayakkabılarla ayıyı iple çekerken siz ve ayı birbirinize yaklaşacaksınız. Bu işlemi ayıya temas edene kadar devam ettiriniz. Metre ile sizin x_p ve ayının x_b ne kadar kaydığını ölçün. $m_b x_b = m_p x_p$ den ayının kütlesini belirleyiniz.

Örnek 9.17 Havada patlayan roket

Bir roket havaya fırlatıldıktan bir süre sonra patlayarak küçük parçalara dağılır. Roketin patlamadan önce ve sonraki durumları için kütle merkezinin hareketi hakkında ne söylenebilir?



Kutup ayısının kütlesi

Çözüm Hava direnci ihmal edilince roket sadece yerçekimi kuvveti etki eder. Bu durumda roket patlayana kadar parabolik bir yörünge izler. İç kuvvetlerden dolayı oluşan patlamadan sonra dağılan parçaların kütle merkezi patlamadan önceki yörünge ile aynı parabolü takip eder.

Örnek 9.18 Patlayan roket

Bir roket düşey doğrultuda yukarı doğru fırlatılır. Roket 1000 m yüksekliğe ve 300 m/s lik sürata ulaşınca eşit kütleli üç parçaya ayrılacak şekilde patlar. Kütlelerden biri aşağıya doğru 450 m/s sürat ile hareket eder. İkinci parça ise 240 m/s ile doğu yönünde hareket eder. Bu verilere göre üçüncü parçanın hızını belirleyiniz.

Patlamadan sonra her bir kütle $M/3$ kadardır.

Patlamadan önceki momentum aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{p}_i = M\mathbf{v}_i = M(300\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s})$$

Patlamadan sonraki momentum :

$$\mathbf{p}_f = \frac{M}{3} (240\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) + \frac{M}{3} (450\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}) + \frac{M}{3} \mathbf{v}_f$$

$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$ momentum korunumu ifadesinden

$$\begin{aligned} \frac{M}{3} \mathbf{v}_f + \frac{M}{3} (240\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) + \frac{M}{3} (450\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}) \\ = M(300\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_f = (-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}$$

9.8 Roket İtmesi

Günlük hayatta kullandığımız araba veya lokomotif gibi bir çok araç sürtünmeden yararlanarak hareket ederler. Arabada yol ile tekerlek arasındaki sürtünme kuvvetinden, lokomotifte ise rayların üzerinde hareket için itme kuvvetinden yararlanır. Roketin ise üzerinde hareket edebileceği bir yol veya ray yoktur. Rokey sürtünmeden farklı bir şekildeki kuvvetlerden yararlanarak hareket eder. Roketin hareketi çizgisel momentumun korunumu ile açıklanabilir. Roketten dışarı atılan yakıttan yararlanır.

9.8 Roket İtmesi



Şekil 9.27 Uzay mekiğinin kalkış anında sıvı ve iki katı-yakıt tanlarındaki yakıtın kullanılmasıyla ortaya çıkan duman. Columbia uzay mekiği 1 Şubat 2003 teki kalkışından kısa bir süre sonra patlamıştı.

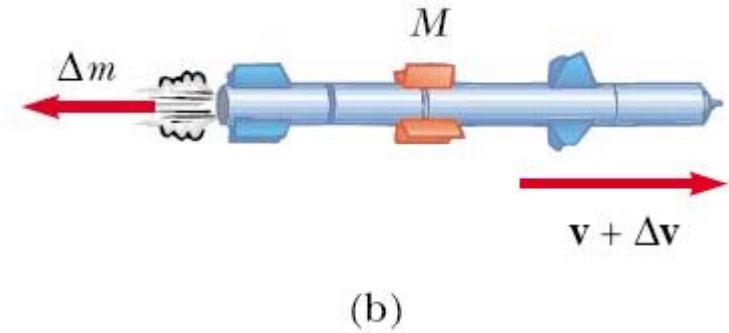
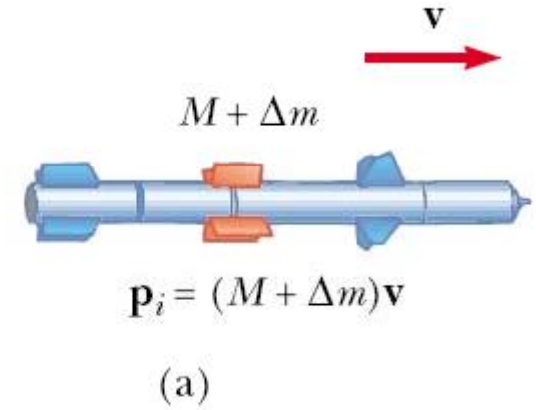
9.8 Roket İtmesi

Roketin hareketi tekerlekli araba üzerine oturtulmuş bir tabancanı patlaması ile mermi mv momentumunu kazanır. Buradaki v hızı yere göre olan hızdır. Sistem araba, tabanca ve mermilerden oluşmaktadır. Araba momentum korunumundan dolayı merminin gittiği yönün tersinde hareket edecektir. Tabancadan ateşlenen her mermi araba ve tabancaya mv kadarlık momentum ekleyecektir. Eğer n tane mermi atılmışsa mermi üzerine etki eden ortalama kuvvet $F = nmv$ kadar olacaktır.

9.8 Roket İtmesi

Şekil 9.28 Roket itmesi.

- (a) Roketin başlangıç kütlesi kendi kütlesi artı yakıttır, herhangi bir t anında bu kütle $M + \Delta m$ şeklindedir ve roketin sürati v dir. (b) Bir $t + \Delta t$ anında roketin toplam kütlesinde yakıt kullanıldığı için bir azalma olur. Roketin kütlesi Δm kadar azalırken sürati artar.



9.8 Roket İtmesi

Sistemin başlangıçtaki momentumu son momentuma eşitlenirse

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

M - Roketin kütlesi

Δm - Yakıtta eksilen miktar

$$M \Delta v = v_e \Delta m$$

$M \Delta v$ ile $v_e \Delta m$ zıt yönlerdedir.

Δt sıfıra çok yakın seçilirse

$$\Delta v \rightarrow dv \text{ ve } \Delta m \rightarrow dm$$

$dm = -dM$. eksi işareti kütledeki azalmayı göstermektedir.

$$M dv = v_e dm = -v_e dM$$

Roket, serbest uzayda çizgisel momentumundaki değişimini yakıtını kullanarak yani bir tarafından gaz çıkartarak sağlar. Gazlar motordan dışarı atıldıkça roketin ilerlemesi sağlanır. Burada da başlangıçtaki ve son durumdaki momentumlar eşittir. Gazlarla roketin momentumları zıt yönlerdedir.

9.8 Roket İtmesi

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = v_e \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$$

$$\text{İtme} = M \frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

Rokete etki eden itme çıkan gazlardan sağlanmaktadır. Bu itmeyi yandaki denklemden hesaplayabiliriz.

Örnek 9.19 Uzaydaki roket

Bir roket serbest uzayda yere göre 3.0×10^3 m/s süratle ilerlemektedir. Roketin motorları çalıştırılınca roketten çıkan gazlar rokete göre 5.0×10^3 m/s süratle hareket etmektedirler.

(A) Roketin yere göre süratini roketin kütlesi yarıya düşüncü hesaplayınız.

(B) 50 kg/s lik yakıt yakılınca rokete sağlanan itmeyi hesaplayınız.

$$\begin{aligned}v_f &= v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \\&= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.5 M_i}\right) \\&= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{itme} &= \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) (50 \text{ kg/s}) \\&= 2.5 \times 10^5 \text{ N}\end{aligned}$$