T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

GENEL BİR KUANTUM DURUMUNUN IŞINLAMA PROTOKOLÜNÜN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS

Nüket ÜNAL

EKİM-2022
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

GENEL BİR KUANTUM DURUMUNUN IŞINLAMA PROTOKOLÜNÜN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

QUANTUM TELEPORTATION PROTOCOL FOR AN ARBITRARY N-QUBIT STATE

YÜKSEK LİSANS

Nüket ÜNAL

EKİM-2022
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

GENEL BİR KUANTUM DURUMUNUN IŞINLAMA PROTOKOLÜNÜN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

QUANTUM TELEPORTATION PROTOCOL FOR AN ARBITRARY N-QUBIT STATE

YÜKSEK LİSANS

Nüket ÜNAL

Danışman: Prof. Dr. Necati ÇELİK
2. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selim KAYA

EKİM-2022
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans olarak hazırlamış olduğum "**Genel bir kuantum durumunun ışınlama protokolünün gerçekleştirilmesi**" isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirtiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

05/10/2022

……………………….

Nüket ÜNAL

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Prof. Dr. Necati ÇELİK’ e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Araştırma sürecinde desteklerinden ve yardımlarından dolayı Dr. Öğr. Üyesi Selim KAYA hocama teşekkürlerimi sunarım. Tüm çalışmalarım aşamasında yanımda olan ve her an yardımıma koşan, sıkıntılarımı ve mutluluğumu paylaştığım, yol arkadaşım, can yoldaşım, sevgili eşim, İlker ÜNAL’ a teşekkürlerimi sunarım. Canım kızım Beren ÜNAL ve canım oğlum Batuhan ÜNAL’ a sevgilerimi yolluyorum. Hayatım boyunca maddi manevi desteğini esirgemeyip yanımda olan değerli annem ve babamın ellerinden öpüyorum. Yüksek lisans öğrenimimde ve tez aşamasında destek olan tüm sevdiklerime teşekkürlerimi sunarım.

Nüket ÜNAL
GÜMÜŞHANE-2022

ÖZET

Bu tezde, keyfi N kübitlik bir durum için pratik bir kuantum ışınlanma protokolü önerilmiştir. Önerilen protokolde gönderici ve alıcı önceden dolanık bir durumun kübitlerini paylaşırlar. Gönderici ışınlamak istediği durumla, dolanık durumdaki payının kübitlerini etkileştirdikten sonra, ortak bir durum ediyorlar. Bu ortak durum, göndericinin' in ve alıcının sahip olduğu kübitlerin ayrılacağı ve bu durumların tek kübit kapıları kullanılarak (X ve Z) 4N kez yeniden düzenleneceği şekilde yazılmıştır. Birleşik durumdaki durumların yeniden düzenlenmesinde kullanılacak bu tekli kübit kapılarının serilerini belirlemek için küme teorisi kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir. Önerdiğimiz protokolle, rastgele bir N kübit durumu bir konumdan diğerine güvenilir bir şekilde ışınlanabilir. Örnek olarak, rastgele iki ve üç kübitlik durumlar için ışınlama protokollerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: Bell durumları, Kuantum bilgi teorisi, Kuantum dolanıklılık, Kuantum ışınlama, Kübit

SUMMARY

In this thesis, a practical quantum teleportation protocol for an arbitrary N-qubit state is proposed. In the proposed protocol sender and receiver share a maximall entangled state in advance. After sender interacts the state she wants to teleport with the qubits of her share in the entangled state, a joint state is obtained. This joint state is written in such a way that the qubits in senders' and receivers' possession are separated and these states are re-arraned 4N times using single-qubit gates (Z and X only). A method is developed using set theory to determine the series of these single-qubit gates to be used in rearrangement of the states in the joint state. With the protocol we propose, one can faithfully teleport an arbitrary N-qubit state from one location to another. As an example we studied the teleportation protocol for an arbitrary two and three-qubit states.

Keywords: Bell states, Quantum information theory, Quantum teleportation, Quantum entanglement, Qubit

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	:Plank sabiti
$\mid \rangle$	:Ket
$\langle \mid$	:Bra
σx ,σy ,σz	:Pauli matrisleri
†	:Hermitik eşlenik
⊗	:Tensör çarpımı
i	:Kompleks sayı
tr	:İz işlemcisi
H	:Hadamard Kapısı
X	:X Kapısı
Y	:Y Kapısı
Z	:Z Kapısı
CNOT	:Kontrol Değil Kapısı
Alice ve Bob	:Hipotetik kişiler

1. GİRİŞ

Kuantum Hesaplama ve Kuantum Bilgi, kuantum mekanik sistemleri kullanarak bilgiyi işleme çalışmasıdır. 1980'li yılların başlarında, ışık hızından daha hızlı olacak şekilde sinyal gönderiminin mümkün olup olmadığı sorusu gündem olmuştur. Eğer bir kuantum mekanik durum vektörünün kopyalanması mümkün ise, ışık hızından daha hızlı sinyal gönderimi de mümkün olacaktı. Ancak yine 1980'li yılların başlarında keşfedilen bir kuantum durumunun kopyalanamayacağı gerçeği, ışık hızından daha hızlı sinyal gönderiminin mümkün olmadığını göstermiştir. Bu sonuç, kuantum hesaplama ve kuantum bilgi çalışma alanında elde edilen ilk sonuçlardan biri olarak değerlendirilir (Nielsen ve Chuang, 2010).

1993 yılında Benett ve arkadaşları kuantum mekaniğinin en önemli ve ilginç uygulamalarından bir tanesi olan Kuantum Işınlama olayını keşfettiler (Bennett vd., 1993). Araştırmacılar Einstein-Podolski-Rosen Kanalı (Einstein vd., 1935) denilen dolanık bir durumu ($|\psi\rangle = (a|00\rangle+b|11\rangle)/\sqrt{2}$) kullanarak bir kübitlik durumu ($|\psi\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$) bir yerden başka bir yere iki bitlik bir klasik bilgi paylaşımı ile transfer etmenin mümkün olduğunu gösterdiler. Dört yıl sonra bu ışınlama protokolü, deneysel olarak gerçekleştirildi (Bouwmeester vd., 1997). Bu çalışmada, fotonlar fiziksel olarak bağlı olmasa bile bilginin bilgisayar çiplerindeki fotonlar arasında aktarılabileceği gösterilmiş oldu. Bu sonuç, daha hızlı ve daha verimli işlemciler ve sensörler sağlayarak teknoloji, tıp ve bilimde devrim yaratma potansiyeline sahip olan kuantum hesaplamayı geliştirmede önemli bir adım olarak değerlendirilir. Işınlanma kuantum mekaniğinin atom altı dünyasında mümkündür. Kuantum dünyasında ışınlama, maddenin taşınmasından ziyade bilginin taşınmasını içerir.

Bir kübitlik bir durumun deneysel olarak ışınlanmasının ardından, iki kübitlik bir durumun ($|\psi\rangle = a|00\rangle+b|01\rangle+c|10\rangle+d|11\rangle$) ışınlanıp ışınlanamayacağı sorusu gündeme gelmiştir. Yaklaşık beş yıl sonra, bir grup araştırmacı (Lee vd., 2002), iki kübitlik bir sistemin ışınlanması için bir protokol geliştirmişler ancak bu protokolün açık bir şekilde ifadesi çalışmada yer almamıştır. İki kübitlik sistemin açık bir şekilde ifadesi 3 yıl sonra Rigolin (Rigolin, 2005) tarafından gerçekleştirildi. Bu çalışmada her ne kadar Rigolin N kübitlik bir durumun ışınlanması için bir formülasyon geliştirse de ikiden fazla kübitlik bir durumun ışınlanma protokolü için açık bir çalışma sunamamıştır.

İkiden fazla kübitlik bir durumun ışınlanması son derece karışık ve fazla sayıda Bell durumu kullanmayı gerektirir. Örneğin 1 kübitlik durumun ışınlanması 4, 2 kübitlik durumun ışınlanması 16, 3 kübitlik durumun ışınlanması 64, 4 kübitlik bir durumun ışınlanması 256 ve nihayet N kübitlik durumun ışınlanması 4^N tane Bell durumu üretmeyi ve kullanmayı gerektirir. Her ne kadar literatürde 3 kübitlik durumların ışınlaması ile ilgili çalışmalar olsa da, bu ışınlama protokolleri çok karmaşık(Li vd., 2016), okunması zor (Liu, 2014) ve hatta bazılarını anlamak imkansız (Li, 2019) gibidir. Daha sonra kuantum ışınlama protokolü N-kübitlik duruma genelleştirildi. Bu protokollerde kuantum kanallar olarak Bell-tipi N-kübit durumu (Pathak ve Banerjee, 2011), N-qübitlik W-durumları (Wen-Xue, 2010), N-kübitlik GHZ-durumu (Man, 2007), maksimum dolanık olmayan Bell durumları (Wei-Xing, 2007), birleşmiş GHZ-Bell durumları (Liu, 2007) ve gerçek çok parçacıklı dolanık Bell durumları (Saha ve Panigrahi, 2012)(Chen, 2006) kullanılmıştır.

2022 Nobel Fizik Ödülü, kuantum dolanıklılık alanında yaptıkları çalışmaları nedeni ile üç fizikçiye verildi. Böylece Kuantum dolanıklılık, kuantum bilgi transferinde kullanılan kuantum kanalın temelini oluşturduğu için kuantum bilgi teorisi alanında yapılan önemli bir çalışma olarak değerlendirilmiş oldu.

Bu çalışmada, N kübitlik bir durumun ışınlanma protokolü açık bir şekilde oluşturulmuş, örnek olarak ta 2 ve 3 kübitlik durumların ışınlama protokolü açık bir şekilde verilmiştir. Çalışmamız, kuantum bilgisayarlar ve kuantum bilgi transferi alanına bir katkı sunmuştur.

1.1. Özet

Bu tezde, keyfi N kübitlik bir durum için pratik bir kuantum ışınlanma protokolü önerilmiştir. Önerilen protokolde Alice ve Bob önceden dolanık bir durumun kübitlerini paylaşırlar. Alice ışınlamak istediği durumla, dolanık durumdaki payının kübitlerini etkileştirdikten sonra, ortak bir durum elde eder. Bu ortak durum, Alice’ in ve Bob’un sahip olduğu kübitlerin ayrılacağı ve bu durumların tek kübit kapıları kullanılarak (X ve Z) 4N kez yeniden düzenleneceği şekilde yazılmıştır. Birleşik durumdaki durumların yeniden düzenlenmesinde kullanılacak bu tekli kübit kapılarının serilerini belirlemek için küme teorisi kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir. Önerdiğimiz protokolle, rastgele bir N kübit durumunu bir konumdan diğerine güvenilir bir şekilde ışınlanabilir. Örnek olarak, rastgele iki ve üç kübitlik durumlar için ışınlama protokollerini inceledik.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezde, N kübitlik bir durumun bir yerden başka bir yere ışınlama protokolünün geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Örnek olarak ta 2 ve 3 kübitlik iki durumun ışınlama protokolü açık bir şekilde verilmiştir.

Kuantum ışınlanma, bilinmeyen bir kuantum durumunun bir yerden başka bir yere, arada herhangi bir fiziksel bağlantı olmaksızın aktarılması olayıdır. 1993'te Bennett ve arkadaşları, keyfi tek kübitlik bir durum ($|\psi\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle$) için ilk kuantum ışınlama protokolünü, Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) dolaşık bir kübit çifti ve iletişim için ikili bir klasik bilgi bitinin yardımıyla oluşturdular. Onların önerisinde, bu iletim sırasında durum hakkında herhangi bir bilgi alınmaz. Bu teorik öneriden sonra, kuantum ışınlama olayı, dolaşık fotonlar kullanılarak deneysel olarak gerçekleştirildi. Bir sonraki soru, sadece tek bir kübiti değil, birden fazla kübit durumunu ışınlamanın mümkün olup olmadığıydı. Lee ve arkadaşları, keyfi bir iki kübitlik kuantum durumunu ($|\psi\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle$) ışınlamanın mümkün olduğunu gösterdi. Ancak protokolün açık bir şekilde oluşturulmasını sağlayamadılar. Üç kübit durum için ($|\psi\rangle = \alpha_1|000\rangle + \alpha_2|001\rangle + \alpha_3|010\rangle + \alpha_4|100\rangle + \alpha_5|011\rangle + \alpha_6|101\rangle + \alpha_7|110\rangle + \alpha_8|111\rangle$) kuantum ışınlama protokolü önerildi. Rigolin, N-kübit ışınlanma protokolü için genelleştirilmiş Bell durumları olarak adlandırdığı şeyi üretmek için bir formül vermesine rağmen, ışınlanma protokolünün başarılı bir şekilde çalışması için bu durumların doğru bir sırada nasıl yazılacağını sağlamadı. Ayrıca, kuantum mekaniğinin doğası gereği, kübit sayısı arttıkça ışınlanma protokolü çok karmaşık hale gelir ve prosedürü takip etmek zorlaşır. Nispeten basit ve takip etmesi kolay bir ışınlanma protokolü oluşturmak çok takdir edilecektir. Bu, bizi N-kübit ışınlanma protokolünün genelleştirmesini daha da fazla incelemeye motive ediyor. Bu çalışmada, orijinal tanımın genelleştirilmesi olan bir kuantum ışınlanma protokolü önerdik. Bir N-kübit durumunu ışınlamak için kullanılacak durumları yeniden düzenlemek için bir yöntem geliştirdik. Bu yöntem oldukça göstericidir ve anlaşılması kolaydır. Bu yöntemle, rastgele bir N-kübitin kuantum durumu için ışınlanma protokolü kolayca oluşturulabilir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Kuantum Mekaniği

On dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru, Klasik Fizik teorilerinin tüm fizik yasalarını açıklayabileceğine inanılıyordu. Newton Yasaları mekanik olaylarını, Maxwell Denklemleri elektrik ve optik olaylarını, İstatistik Mekanik teorisi ise termodinamik olaylarını açıklayabiliyordu. Aynı yıllarda yapılan deneysel çalışmalar klasik fizikle uyumsuzluk göstermeye başlayınca yeni bir arayışa girildi. Otuz yıl kadar süren bir arayışın ardından 'Kuantum Mekaniği' adı altında yeni bir fizik bilimi doğdu. Kuantum Mekaniği atom altı dünyasını matematiksel nesneler cinsinden tanımlayan ve matematiksel nesneleri fiziksel içeriğe dönüştürmek üzere bir dizi kuralları olan bilim dalıdır (Karaoğlu,2008).

Kuantum Mekaniğinin gelişimine katkısı olan olaylardan ilki Max Planck tarafından ortaya atılan 'Siyah Cisim Işıması' dır. 1900 yılında Max Planck atomların radyasyon alış verişlerinin sürekli olmayıp kesikli (kuantalar) birimler şeklinde olduğunu ifade ederek frekansı υ olan bir radyasyonun atomlara enerji dağılımının $h\upsilon$'nün tam katları şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Kuantum Mekaniğinin gelişmesine katkı sağlayan bir diğer olay ise Einstein' nin açıkladığı 'Fotoelektrik Olay' dır. Aslında bu olayı ilk kez 1890 yılında Hertz gözlemlemiş fakat tam olarak açıklayamamıştır. 1905 yılında ise Albert Einstein ışığın dalga olmayıp enerji paketleri halinde taneciklerden oluştuğunu ileri sürmüştür. Bir diğer adım ise Louis de Broglie tarafından ortaya atılan madde dalgası kavramıdır. Louis de Broglie 1924 yılındaki doktora tezinde parçacıkların uygun koşullarda dalga davranışı gösterebileceğini savundu. 1927 yılında Davisson ve Germer nikel kristallerinin yapısını inceledikleri sırada X ışınları yerine elektron demetleri kullanarak elektronların da tıpkı bir ışık gibi girişim yapabildiklerini tesadüfen gözlemlediler. Bütün bu adımlar birbirlerini destekleyecek biçimde Kuantum Mekaniğinin gelişmesine katkı sağladılar. Sonuç olarak Klasik Fizik atomik boyutlarda yerini Kuantuma devretti.

2.1.1. Kuantum Mekaniğinin Postülaları

Kuantum mekaniğinin postülaları, kompleks vektör uzayındaki matematiksel teorilerin kuantum mekaniğinin fiziksel dünyası arasındaki bağlantılarıdır. Diğer bir ifade ile kompleks vektör uzayındaki matematiksel teorilerin fiziksel olarak anlamlandırılmasıdır. Kuantum teorisinin gelişmesi kolay olmamıştır. Bu alana katkı yapan birçok fizikçi çoğu zaman olayları anlamlandırmada başarısız olmuşlar, birçok durum, yanılma ve engelle karşılaşmışlardır. Fiziksel gerçeklik, kuantum teorisinin tamamlanmasına, bu yolda ilerlenmesi gerektiğine fizikçileri zorlamıştır.

2.1.1.1. I. Postüla: Durum Uzayı

Durum uzayı, Kuantum Mekaniksel hesaplamaların gerçekleştiği uzaydır. Başka bir deyişle, Kuantum Mekaniksel parçacıkları temsil eden dalga fonksiyonunun yaşadığı uzay olarak ta tanımlanabilir. Bu uzaya Hilbert Uzayı denir. Tüm izole olmuş fiziksel sistemler, kompleks vektör uzayında bir vektör ile temsil edilirler. Buna 'durum uzayı' da denir. Burada fiziksel sistem olarak kübit sistemini inceleyeceğiz. Örneğin, bir kübitlik bir fiziksel sistem kompleks vektör uzayında iki boyutlu bir vektör ile temsil edilir.

Bu uzayın elemanları "ket" olarak adlandırılan ($|\psi\rangle$) karmaşık vektörlerdir. Sistem hakkında istediğimiz bütün bilgileri içerirler. Bir ket' in karmaşık eşleniği başka bir vektör olan ve "bra" olarak adlandırılan($\langle\psi|$) diğer bir vektörle temsil edilir. Bu uzayda $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ve $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ortonormal vektör seti ise $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada a ve b kompleks sayılardır. $|\psi\rangle$' nın birim vektör olması demek $\||\psi\rangle\| = 1$ olduğudur. Yani $\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ şeklinde olur. Yukarıda bahsedilen bra vektörü aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\langle\psi| = \langle 0|a^* + \langle 1|b^* \qquad \text{(Eşitlik 1)}$$

Şimdi ket ve bra vektörlerinin iç çarpımlarını gerçekleştirelim.

$$\langle\psi|\psi\rangle = (\langle 0|a^* + \langle 1|b^*)(a|0\rangle + b|1\rangle) = a^*a\langle 0|0\rangle + a^*b\langle 0|1\rangle + b^*a\langle 1|0\rangle + b^*b\langle 1|1\rangle = 1 \qquad \text{(Eşitlik 2)}$$

Ortonormal vektörler ($\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$; $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ eşitlik(2)' de yerine yazılırsa;

$$\langle\psi|\psi\rangle = a^*a + b^*b = 1 \qquad \text{(Eşitlik 3)}$$

eşitliği elde edilir. Burada $|a|^2$, $|\psi\rangle$ durumu ölçüldüğünde sonucun 0 (sıfır) olma ihtimali, $|b|^2$ ise ölçüm sonucunun 1 (bir) olma ihtimalini verir. Bunu aşağıdaki şekilde ifade etmek mümkündür.

$$P_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a|^2 \qquad \text{(Eşitlik 4)}$$

$$P_1 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |b|^2 \qquad \text{(Eşitlik 5)}$$

Bir kübitlik sistem bizim için en temel kuantum mekaniksel sistem olacak. Buradaki $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ ortonormal vektör seti, klasik bitin alabildiği 0 ve 1 değerlerinin benzeridir. Ancak klasik bitten en önemli farkı, bir sistemin $|0\rangle$ ve $|1\rangle$' lerin süperpozisyon durumlarının da mevcut olmasıdır.

2.1.1.2. II. Postüla: Durum Vektörlerinin Zaman Evrimi

$|\psi\rangle$, bir kuantum mekaniksel durum vektörü olsun. Bu vektör kompleks vektör uzayında değişir. Bu değişimi gerçekleştiren birçok işlemci olabilir. Ancak $|\psi\rangle$' ın değişiminin fiziksel olarak anlamlı olabilmesi için işlemcilerin bazı özellikleri sağlaması gerekir. Kuantum mekaniksel sistemlerin zamanla değişimini gerçekleştiren işlemciler lineer ve üniter işlemcilerdir.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{t} |\psi'\rangle \qquad |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \qquad \text{(Eşitlik 6)}$$

$U|\psi\rangle = U\sum_i a_i|i\rangle = \sum_i a_i U|i\rangle$ lineerlik özelliği, $U^\dagger U = I$ ise üniterlik özelliği olarak bilinir. Burada lineerlik özelliği, matematiksel bir özelliktir. Üniterlik özelliği ise önemli bir fiziksel gerçekliğe karşılık gelir. Durum vektörlerinin iç çarpımları korunur.

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t = 0)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 7)}$$

$$|\Phi(t)\rangle = U(t)|\Phi(t = 0)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 8)}$$

$$\langle\Phi(0)|\psi(0)\rangle = \langle\Phi(t)|\psi(t)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 9)}$$

eşitlik (6-8) bilginin asla yok olmayacağı anlamına da gelir.

$$|\Phi(t)\rangle = U(t)|\Phi(t = 0)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 10)}$$

$\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(t = 0)|U^{\dagger}(t)$ (Eşitlik 11)

$\langle\Phi(t = 0)| U^{\dagger}(t)U(t)|\psi(t = 0)\rangle = \langle\Phi(0)|\psi(0)\rangle$ (Eşitlik 12)

$U^{\dagger}(t)U(t) = I$ (Eşitlik 13)

Örneğin; Pauli matrisleri σ_x ,σ_y , σ_z üniter işlemcilerdir. Yani

$\sigma_x^{\dagger}\sigma_x = I$ (Eşitlik 14)

$\sigma_y^{\dagger}\sigma_y = I$ (Eşitlik 15)

$\sigma_z^{\dagger}\sigma_z = I$ (Eşitlik 16)

Üniter işlemciler her zaman e^{iA} şeklinde yazılabilirler.

$U = e^{iA}$, $U^{\dagger} = e^{-iA}$ (Eşitlik 17)

Burada A bir hermityen işlemcidir. Şimdi durum vektörünün zamanla nasıl değiştiğine bakalım:

U(t) sadece zamana bağlı bir üniter işlemcidir. t=0 olduğunda yani bir zaman geçmediğinde U(t = 0) = I şeklinde birim işlemciye eşit olacağını kestirmek zor değildir. Yani

$U(0)|\psi\rangle = |\psi\rangle$ (Eşitlik 18)

$U(t = 0) = I$ (Eşitlik 19)

şeklinde yazabiliriz. Şimdi durum vektörünü çok az değiştirelim. t=ε alalım ve ε çok küçük olsun. Bu durumda

$\varepsilon^2 \rightarrow 0$ (Eşitlik 20)

olur ve

$U(t = \varepsilon) = I+\varepsilon\varphi;\ \varphi \equiv \frac{-iH}{\hbar}$ (Eşitlik 21)

$U(t = \varepsilon) = I - \frac{i}{\hbar}\varepsilon H$ (Eşitlik 22)

yazılır. Burada H şimdilik sadece bir işlemcidir. U'nun üniterlik özelliğini kullanarak

$U^{\dagger}U = I$ (Eşitlik 23)

yazılabilir. Aşağıdaki işlemi yaparsak,

$(I + \frac{i}{\hbar}\varepsilon H^{+})(I - \frac{i}{\hbar}\varepsilon H) = I$ (Eşitlik 24)

şeklinde yazılır. $H^{\dagger} = H$ hermityen bir işlemcidir. Şimdi durum vektörünün çok küçük bir zaman sonraki halini yazmaya çalışırsak,

$t_1 = t;\ t_2 = t+\varepsilon$ olmak üzere (Eşitlik 25)

yazılabilir. Bu zamanda öteleme işlemini yapan işlemcimiz U olduğu için,

$U(\varepsilon)|\psi(t_1 = t)\rangle = |\psi(t_2 = t+\varepsilon)\rangle$ (Eşitlik 26)

şeklinde olur. U işlemcisinin açık halini durum vektörü üzerine etki edersek,

$(I - \frac{i}{\hbar}\varepsilon H)|\psi(t)\rangle = |\psi(t+\varepsilon)\rangle$ (Eşitlik 27)

elde edilir. Yukarıdaki eşitliği yeniden düzenlersek,

$|\psi(t_1 = t)\rangle - \frac{i}{\hbar}\varepsilon H|\psi(t)\rangle = |\psi(t+\varepsilon)\rangle$ (Eşitlik 28)

$-i\varepsilon U|\psi(t)\rangle = |\psi(t+\varepsilon)\rangle - |\psi(t)\rangle$ (Eşitlik 29)

kullanılırsa

$$\mathrm{H}|\psi(t_1 = \mathrm{t})\rangle = i\hbar(\frac{|\psi(t+\varepsilon)\rangle - |\psi(t)\rangle}{\varepsilon}) \quad \text{(Eşitlik 30)}$$

elde edilir. Burada H Hamiltoniyen işlemcisidir. Bu sistemin toplam enerjisini temsil eder. Bu denkleme ise Schrödinger denklemi denir. Schrödinger denklemi çözülerek $|\psi(t)\rangle$ durum vektörünün zamanla nasıl değiştiği belirlenebilir.

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathrm{E}|\psi(t)\rangle \quad \text{(Eşitlik 31)}$$

$$\int_{|\psi(0)\rangle}^{|\psi(t)\rangle} \frac{d|\psi(t)\rangle}{|\psi(t)\rangle} = \int_0^t \frac{-iE}{\hbar}dt \quad \text{(Eşitlik 32)}$$

$$\ln\left(\frac{|\psi(t)\rangle}{|\psi(0)\rangle}\right) = -\frac{iE}{\hbar}t \quad \text{(Eşitlik 33)}$$

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad \text{(Eşitlik 34)}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle \quad \text{(Eşitlik 35)}$$

$$\mathrm{U}(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t},\ \mathrm{U}^{\dagger}(t) = e^{i\frac{H}{\hbar}t} \quad \text{(Eşitlik 36)}$$

Bu değişim bize şunu gösteriyor: Durum vektörü kompleks vektör uzayında enerjiye bağlı olarak belirli bir frekansla döner.

$$|\psi(t)\rangle = \left[\cos\left(\frac{E}{\hbar}t\right) - i\sin\left(\frac{E}{\hbar}t\right)\right]|\psi(0)\rangle \quad \text{(Eşitlik 37)}$$

$$\frac{E}{\hbar} = \omega;\ \mathrm{E} = \hbar\omega \quad \text{(Eşitlik 38)}$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (38) düzenlendiğinde

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t}|\psi(0)\rangle \quad \text{(Eşitlik 39)}$$

elde edilir. Şimdi H işlemcisinin öz durumlarını düşünelim: $|\psi_n(t)\rangle$; H işlemcisinin öz durumları olsun.

$$\mathrm{H}|\psi_n(t)\rangle = E_n|\psi_n(t)\rangle \quad \text{(Eşitlik 40)}$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n(t)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 41)}$$

Bu durumda Schrödinger denklemini çözelim:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 42)}$$

Eşitlik(42) ve eşitlik(43) birlikte yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_n \alpha_n |\psi_n(t)\rangle\right) = -\frac{i}{\hbar}H\left(\sum_n \alpha_n |\psi_n(t)\rangle\right) \qquad \text{(Eşitlik 43)}$$

elde edilir. H lineer bir işlemci olduğu için, α_n katsayıları arasından geçerek $|\psi_n(t)\rangle$ üzerine etkiyecek ve E_n enerji özdeğerlerini üretecektir.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_n \alpha_n |\psi_n(t)\rangle\right) = -\frac{i}{\hbar}\left(\sum_n \alpha_n H|\psi_n(t)\rangle\right) = -\frac{i}{\hbar}\left(\sum_n \alpha_n E_n|\psi_n(t)\rangle\right) \qquad \text{(Eşitlik 44)}$$

$$\sum_n \alpha_n |\psi_n(t)\rangle = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\sum_n \alpha_n |\psi_n(0)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 45)}$$

$$\sum_n \alpha_n |\psi_n(t)\rangle = e^{-i\omega_n t}\sum_n \alpha_n |\psi_n(0)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 46)}$$

Bu eşitlikler bize; her öz-vektörün kendi frekansı ile değiştiğini söylüyor. Yüksek enerjili durumlar yüksek frekansla düşük enerjili durumlar ise düşük frekansla değişirler. Hamiltoniyen işlemcisi hermityen olduğu için köşegenleştirilebilir ve dış çarpım şeklinde temsil edilebilirler.

$$H = \sum_n E_n |E_n\rangle\langle E_n| \qquad \text{(Eşitlik 47)}$$

$|E_n\rangle$ enerji özdurumları ya da bazen kararlı durumlar da denir. E_n ise $|E_n\rangle$ kararlı durumuna ait enerji değeridir. Kararlı durumların zamanla evrimi

$$|E_n(t)\rangle = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|E_n(0)\rangle \qquad \text{(Eşitlik 48)}$$

şeklinde yazılır.

2.1.1.3. III. Postüla: Ölçüm Postülası

Bir kuantum mekaniksel sistemin ölçümü; $\{M_m\}$ölçüm işlemcisiyle temsil edilir. Bu işlemciler ölçüm yapılacak sistemin durum uzayı üzerine etki ederler. Burada "m" ölçüm sonucunda elde edilecek mümkün durumlardan birini temsil eder. Ölçüm yapmadan hemen önce sistemin durumu $|\psi\rangle$ ise, ölçüm yaptıktan sonra "m" sonucunun elde edilme olasılığı P(m);

$$P(m) = \langle\psi|M_m^{\dagger}M_m|\psi\rangle \text{ yada } P(m) = |M_m|\psi\rangle|^2 \quad \text{(Eşitlik 49)}$$

şeklinde yazılır. Ölçümden sonra sistemin kuantum durumu

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m}{\sqrt{P(m)}}|\psi\rangle = \frac{M_m}{\sqrt{\langle\psi|M_m^{\dagger}M_m|\psi\rangle}}|\psi\rangle \quad \text{(Eşitlik 50)}$$

şeklindedir. Olasılıkların normalizasyonu

$$\sum_m P(m) = 1; \ \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \text{(Eşitlik 51)}$$

olarak yazılır. Olasılık denklemi tamlık bağıntısını içerir.

$$\sum_m M_m^{\dagger}M_m = I \quad \text{(Eşitlik 52)}$$

Bu eşitlik, tüm ihtimallerin toplamının 1 olması gerektiği gerçeğinin başka bir ifadesidir.

2.1.1.3.1. İzdüşüm Ölçümleri

İzdüşüm ölçümleri 3.postülada belirtilen genel ölçümün özel bir durumudur. Kuantum mekaniğinde ölçümler bir ölçüm işlemcisi ile gerçekleştiriliyordu. M bir Hermityen işlemci olsun.

$$M = \sum_m m\,\mathbb{P}_m \quad \text{(Eşitlik 53)}$$

Burada "P_m" izdüşüm işlemcisi, m; M işlemcisinin öz değeridir. Bir ölçüm yapıldığında sonucun m olma ihtimali

P(m) = $\langle\psi|\mathbb{P}_m|\psi\rangle$ (Eşitlik 54)

şeklindedir. Sistem $|\psi\rangle$ durumunda iken genel ölçüm postülasında

P(m) = $\langle\psi|M_m^{\dagger}M_m|\psi\rangle$ (Eşitlik 55)

izdüşüm işlemcisini kullanılarak yapılacak hesaplar daha pratik olacaktır. Bizler de çoğunlukla izdüşüm işlemcisi kullanacağız. Ölçüm yapıldıktan hemen sonra, sistemin durum işlemcisi $|\psi'\rangle$ olsun. Burada $|\psi'\rangle$;

$|\psi'\rangle = \frac{\mathbb{P}_m|\psi\rangle}{M_m}$ (Eşitlik 56)

şeklinde olacaktır. Daha önce de ifade ettiğimiz gibi izdüşüm işlemcisi, 3.postülada ifade edilen genel ölçümün bir özel durumudur. 3.postülada ifade edilen M_m ölçüm işlemcisi;

$\sum_m M_m^{\dagger}M_m$ = I (Eşitlik 57)

eşitliğini sağlıyordu. Aşağıdaki şartı da sağlayacak şekilde sınırlandırılırsa;

$M_{m'}M_m = \delta_{m,m'}M_m$ (Eşitlik 58)

genel ölçüm, izdüşüm ölçümüne indirgenir. M ölçüm işlemcisini izdüşüm işlemcisi cinsinden ifade etmiştik

$M = \sum_m m\,\mathbb{P}_m$ (Eşitlik 59)

M işlemcinin ortalama değeri

$\overline{M} = \sum_m m$P(m) (Eşitlik 60)

şeklinde yazılır. Burada P(m); m değeri ölçme ihtimali idi.

P(m) = $\langle\psi|\mathbb{P}_m|\psi\rangle$ (Eşitlik 61)

$$\bar{M} = \sum_m m\,\langle\psi|\mathbb{P}_m|\psi\rangle \;=\; \langle\psi|\sum_m m\,\mathbb{P}_m|\psi\rangle = \langle\psi|M|\psi\rangle \qquad \text{(Eşitlik 62)}$$

M 'nin ortalama veya beklenen değerini hesapladıktan sonra, standart sapmayı da hesaplayabiliriz.

$$\Delta(\mathrm{M}) \;=\; \sqrt{\langle \mathrm{M}^2\rangle - \langle \mathrm{M}\rangle^2} \qquad \text{(Eşitlik 63)}$$

⟨M⟩, M' nin öz durumu olduğu için M' yi ölçersek, kendisi için kesin bir değer elde ederiz. Böyle durumlara 'iyi bilinen durumlar' denir. İzdüşüm işlemcileri de aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$\mathrm{m}\mathbb{P}_m = 1 \qquad \text{(Eşitlik 64)}$$

$$\mathbb{P}_m\mathbb{P}_{m'} = \delta_{m,m'}\mathbb{P}_m \qquad \text{(Eşitlik 65)}$$

$$\mathbb{P}_m \;=\; |m\rangle\langle m| \qquad \text{(Eşitlik 66)}$$

Burada |m⟩ ortonormal baz vektör seti oluşturuyor.

2.1.2. Dirac Gösterimi

Dirac notasyonunu kuantum mekanikte ilk kez kullanmaya başlayan kişi Paul Adrien Maurice Dirac' tır. Kuantum Mekaniğinde vektörlerin gösterimi için kullandığımız araçlardır. Fiziksel sistemlerin durumları vektörlerle temsil edilir. Dirac gösterimi bra (⟨ |), ket(| ⟩), braket(⟨ | ⟩) şeklinde gösterilir. Bu vektörler aynı zamanda aşağıdaki gibi sutün vektörleri şeklinde de gösterilebilir:

$$|0\rangle = \binom{1}{0} \qquad \text{(Eşitlik 67)}$$

$$|1\rangle = \binom{0}{1} \qquad \text{(Eşitlik 68)}$$

$$|0\rangle|0\rangle = \binom{1}{0}\binom{1}{0} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = |00\rangle \qquad \text{(Eşitlik 69)}$$

$$|1\rangle|1\rangle = \binom{0}{1}\binom{0}{1} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = |11\rangle \qquad \text{(Eşitlik 70)}$$

$$|0\rangle|1\rangle = \binom{1}{0}\binom{0}{1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = |01\rangle \qquad \text{(Eşitlik 71)}$$

$$|1\rangle|0\rangle = \binom{0}{1}\binom{1}{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = |10\rangle \qquad \text{(Eşitlik 72)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle 0| = (1\ 0) \qquad \text{(Eşitlik 73)}$$

$$\langle 1| = (0\ 1) \qquad \text{(Eşitlik 74)}$$

$$\langle 0|\langle 0| = (1\ 0)(1\ 0) = (1\ 0\ 0\ 0) = \langle 00| \qquad \text{(Eşitlik 75)}$$

$$\langle 1|\langle 1| = (0\ 1)(0\ 1) = (0\ 0\ 0\ 1) = \langle 11| \qquad \text{(Eşitlik 76)}$$

$$\langle 0|\langle 1| = (1\ 0)(0\ 1) = (0\ 1\ 0\ 0) = \langle 01| \qquad \text{(Eşitlik 77)}$$

$$\langle 1|\langle 0| = (0\ 1)(1\ 0) = (0\ 0\ 1\ 0) = \langle 10| \qquad \text{(Eşitlik 78)}$$

elde edilir.

2.1.3. İşlemciler

Kuantum Mekaniğinin matematiksel formülasyonu işlemci kavramı üzerine kurulmuştur. Kuantum Mekaniğindeki fiziksel saf durumlar, özel kompleks Hilbert Uzayında birim-norm vektörleri olarak temsil edilir. Bu vektör uzayındaki zaman evrimi, evrim işlemcisinin uygulanması ile verilir. Herhangi bir gözlenebilir nicelik, bir hermityen ve doğrusal işlemci ile ilişkilendirilmelidir. İşlemciler, deney sonucunda ortaya çıkabilecek değerler oldukları için gerçel özdeğerler vermelidir. Matematiksel olarak bu, işlemcilerin Hermityen olması anlamına gelir. Her özdeğerin olasılığı, fiziksel durumun o öz değerle ilgili alt uzay üzerindeki izdüşümü ile ilgilidir.

Kuantum Mekaniğinin dalga mekaniği formülasyonunda, dalga fonksiyonu uzay ve zamanla veya eşdeğer olarak momentum ve zamanla değişir, bu nedenle gözlemlenebilirler diferansiyel işlemciler ile temsil edilirler.

Matris mekaniği formülasyonunda, fiziksel durumun normu sabit kalmalıdır. Böylece evrim işlemcisi üniter olacağından işlemciler matrisler olarak temsil edilebilir. Fiziksel bir durumu diğeriyle eşleştiren başka herhangi bir simetri bu kısıtlamayı korumalıdır.

2.1.3.1. Özdeğer ve Özvektörler

A herhangi bir işlemci olsun. Genel olarak bir işlemci bir vektörü başka bir vektöre dönüştüren işlemcidir.

$$A|\upsilon\rangle = |\omega\rangle \quad \text{(Eşitlik 79)}$$

Ancak bu işlemci için bazı vektörler vardır ki, bu işlemci vektörün üzerine etki ettiği zaman λ gibi bir katsayıyla beraber vektörün kendisini verir.

$$A|\upsilon\rangle = \lambda|\upsilon\rangle \quad \text{(Eşitlik 80)}$$

Biz bu vektöre ya da vektörlere A işlemcisinin özvektörleri, λ' ya ise "A işlemcisinin özdeğerleri'' deriz. $A|\upsilon\rangle = \lambda|\upsilon\rangle$ denklemini düzenlersek;

$$(A-\lambda I)|\upsilon\rangle = 0 \quad \text{(Eşitlik 81)}$$

elde edilir. Burada I birim matristir veya birim işlemcidir. Karakteristik denklemi yazarsak;

$$\det(A-\lambda I)|\upsilon\rangle = 0 \quad \text{(Eşitlik 82)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin çözümü özdeğerleri verecektir.

2.1.3.2. İşlemci Fonksiyonları

Kompleks vektör uzayında kompleks sayıları yine kompleks sayılara dönüştüren birçok fonksiyon tanımlanabilir. Tıpkı bunlar gibi işlemciler üzerinde de bazı fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bunlara işlemci fonksiyonları denir. İşlemci fonksiyonları bir işlemciyi başka bir işlemciye dönüştürebilir. Burada özellikle Hermityen işlemcilerden bahsedeceğiz. A herhangi bir Hermityen işlemci olsun. Bir işlemcinin en genel hali ile

$$A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| \qquad \text{(Eşitlik 83)}$$

şeklinde tanımlayabiliyoruz. Burada $|i\rangle\langle i|$' ler ortonormal vektör setleri, λ_i bu işlemcinin özdeğerleridir. Bu işlemciyi bir başka işlemciye dönüştüren fonksiyona f(A) diyelim. Burada f(A);

$$f(A) = \sum_i f(\lambda_i)\, |i\rangle\langle i| \qquad \text{(Eşitlik 84)}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisi ise ,$\sqrt{A}$ ve $\ln(A)$değerlerini bulalım. Bu bir hermityen matristir. Bu matrisin özdeğerlerini bulalım:

det(A-λI) = 0 yerine yazılırsa

$$\det\left[\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)^2 = 9$$

$$4-\lambda = 3 \qquad \lambda_1 = 1$$

$$4-\lambda = -3 \qquad \lambda_2 = 7$$

bunlar özdeğerleridir. Şimdi de özvektörlerini bulalım:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

4a+3b = a, 3b = -3a

b = -a ise özvektörlerden birisi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ olur.

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

4c+3d = 7c, 3d = 3c

d = c ise özvektörlerden diğeri $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olur.

A = $\lambda_1|\lambda_1 = 1\rangle\langle\lambda_1 = 1| + \lambda_2|\lambda_2 = 7\rangle\langle\lambda_2 = 7|$

$|\lambda_1 = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|\lambda_2 = 7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sqrt{A} = \sqrt{\lambda_1}|\lambda_1 = 1\rangle\langle\lambda_1 = 1| + \sqrt{\lambda_2}|\lambda_2 = 7\rangle\langle\lambda_2 = 7|$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1 \ -1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

yerine yazarsak;

$\sqrt{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & -1+\sqrt{7} \\ -1+\sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \end{pmatrix}$ olur.

$\ln(A) = \frac{\ln(7)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

şeklinde bulunur.

2.1.3.3. İşlemcilerin Matris Temsili

Daha önce ifade edildiği gibi, bir kuantum mekaniksel işlemci bir durum vektörü üzerine etki ettiği zaman o durum vektörünün önünde bir sayı ile beraber aynısını verir.

$$\hat{\varphi}|\psi_n\rangle = q_n|\psi_n\rangle \tag{Eşitlik 85}$$

Burada q_n genellikle bir kompleks sayıdır. $|\psi_n\rangle$;$\hat{\varphi}$ işlemcisinin özvektörüdür. q_n; $\hat{\varphi}$ işlemcisinin özdeğerleridir denir.

$$\langle\psi_n|\hat{\varphi}|\psi_n\rangle = q_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle \tag{Eşitlik 86}$$

$$\hat{\varphi}_{mn} = q_n\delta_{mn} \tag{Eşitlik 87}$$

$$\delta_{mn} = \begin{Bmatrix} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{Bmatrix} \tag{Eşitlik 88}$$

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} & \cdots \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{Eşitlik 89}$$

Matris işlemcimiz kendi özvektörü üzerine etki ederse; matris temsilinin

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{Eşitlik 90}$$

şeklinde sadece köşegen elemanlar sıfırdan farklı diğerleri sıfırdır. Bu matrisin izi;

$$\mathrm{tr}(\hat{\varphi}) = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_n \tag{Eşitlik 91}$$

$$\mathrm{tr}(\hat{\varphi}) = \sum_{i=0}^{n} q_i \tag{Eşitlik 92}$$

şeklinde yazılır.

2.1.3.4. Tensör Çarpım

Tensör çarpımı hem vektör uzayları üzerinde hem de işlemciler üzerinde yapılan matematiksel bir işlemdir. İki ya da daha fazla vektör uzayını bir araya koyup daha büyük bir vektör uzayı oluşturan matematiksel işlemdir.υ ve ω iki farklı vektör uzayı olsun. Buna göre tensör çarpım:

$$\upsilon \otimes \omega = \chi \tag{Eşitlik 93}$$

şeklinde gösterilir. Burada υ; n boyutlu, ω; m boyutlu vektör uzayı ise χ; m×n boyutlu vektör uzayı olur.

Tensör çarpımının bazı özellikleri vardır.

1) $|\upsilon\rangle$, $\mathcal{V}$ vektör uzayında bir vektör olsun; $|\omega\rangle$, $\mathcal{W}$ vektör uzayında başka bir vektör olsun; z ise kompleks sayı olsun;

$$(z|\upsilon\rangle)\otimes|\omega\rangle = |\upsilon\rangle\otimes(z|\omega\rangle) \quad \text{(Eşitlik 94)}$$

2) $|\upsilon_1\rangle$, $|\upsilon_2\rangle$ $\mathcal{V}$ vektör uzayında bir vektör olsun; $|\omega\rangle$, $\mathcal{W}$ vektör uzayında başka bir vektör olsun

$$(|\upsilon_1\rangle+|\upsilon_2\rangle)\otimes|\omega\rangle = (|\upsilon_1\rangle\otimes|\omega\rangle)+(|\upsilon_2\rangle\otimes|\omega\rangle) \quad \text{(Eşitlik 95)}$$

3) $|\upsilon\rangle$, $\mathcal{V}$ vektör uzayında bir vektör olsun; $|\omega_1\rangle$, $|\omega_2\rangle$, $\mathcal{W}$ vektör uzayında başka iki vektör olsun;

$$|\upsilon\rangle\otimes(|\omega_1\rangle+|\omega_2\rangle) = |\upsilon\rangle\otimes|\omega_1\rangle+|\upsilon\rangle\otimes|\omega_2\rangle \quad \text{(Eşitlik 96)}$$

İki boyutlu iki vektörün tensör çarpımını yapalım: Örneğin;

$|\upsilon\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\quad|\omega\rangle = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ olsun

$|\upsilon\rangle\otimes|\omega\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x3\\1x4\\2x3\\2x4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\6\\8\end{pmatrix}$ şeklinde yazılır.

Şimdi iki boyutlu bir kompleks vektör uzayında

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ ve } |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{(Eşitlik 97)}$$

vektörleri tensör çarpım tanımı kullanılarak

$$|0\rangle\otimes|0\rangle = |0\rangle|0\rangle = |00\rangle \quad \text{(Eşitlik 98)}$$

şekillerinde yazılabilir. Ayrıca

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{(Eşitlik 99)}$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{(Eşitlik 100)}$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{(Eşitlik 101)}$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{(Eşitlik 102)}$$

dört boyutlu kompleks vektör uzayındaki baz vektörleri oluşmuş olur.

2.1.4. Kübitler ve Kuantum Durumları

2.1.4.1. Kuantum Bitler(Kübitler)

Tanım gereği bit; bir sisteme sorulan ve sadece muhtemel iki cevabı olan soruya denir. Yazı/tura, aşağı/yukarı, 0/1 gibi…

İki tip bitten bahsedebiliriz: Klasik bit ve Kuantum bit (kübit). Aslında doğada tek bir tip bit vardır. O da kuantum bit. Çünkü doğa kuantum mekaniksel yasalarla işler. Ancak belli bir değerden sonra özellikle büyük değerlere doğru kuantum mekaniksel özellikler kendini göstermediği için biz bu değerden sonrasını klasik yasalar ile açıklayabiliriz ve bu değerden sonraki bilgi yapıtaşına ise ‘klasik bit’ deriz. Klasik bit’ in muhtemel iki durumu vardır. Bu durumları 0 ve 1 ile temsil edelim. Bu muhtemel durumlar;

1 bitlik bilgi için; 0,1	2 muhtemel durum
2 bitlik bilgi için; 00,01,10,11	4 muhtemel durum
3 bitlik bilgi için; 000,001,010,100,011,101,110, 111	8 muhtemel durum
⋮ ⋮ ⋮	

n bitlik bilgi için; 2^n tane muhtemel durum vardır.

Muhtemel konfigürasyon sayısına N diyelim. O halde N=2^n (n: bit sayısı) olur. Mesela 110010 bir bilgidir. Tüm fiziksel sistemler bit cinsinden ifade edilebilirler. Örneğin, odanın sıcaklığı 27℃' dir. Bu bir bilgidir. Bu bilgi bit cinsinden 11011 şeklinde ifade edilir. Tüm fiziksel sistemler bu 0 ve 1' lerden oluşan sayı kümeleri ile ifade edilebilirler. Tıpkı klasik bitte olduğu gibi, kuantum bitin de muhtemel iki durumu vardır. Fakat mantık olarak klasik bitten çok farklıdır. Bit fiziksel bir sisteme tekabül eder. Kuantum bit için en basit fiziksel sistem elektronun spinidir.

Günümüz modern bilgisayarlarında bilgi metodunun basit biriminin bit olduğu yukarıda belirtilmiştir. Bitler ise 0 ve 1 durumlarından biri ile belirtiliyordu. Benzer mantıkla kuantum bilgisayarlarında bilgi metodunun basit birimi belirlenebilir. Bu birim ise "kuantum bit'' veya kısaca kübit olarak adlandırılır. Bit ve kübitler genel olarak birbirlerine benziyor gibi görünse de temelde aralarında büyük farklılıklar vardır. Bit gibi kübit de iki durumdan birinde olabilir. Bu iki durum ise $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ ile gösterilir. Kuantum mekaniğinde bu gösterim ket, vektör veya durum olarak adlandırılır. Tüm bunlar göz önüne alındığında "bit ile kübit arasındaki fark nedir?'' diye sorulabilir. Bitler klasik bilgisayarlarda 0 veya 1 durumunda olabilir. Kübit ise daha geneldir. Bir kübit $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ durumunda olabileceği gibi süperpozisyon durumunda da olabilir. Süperpozisyon durumu ise $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının lineer kombinasyonudur. $|\psi\rangle$ durumunu dikkate aldığımızda bunun süperpozisyon hali,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \qquad \text{(Eşitlik 103)}$$

şeklinde yazılır. Buradaki α ve β karmaşık sayılardır. Gerçekte kübit $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ durumunda olduğu zaman ölçülebilir. Kuantum mekaniğinin kuralarına göre α ve β' nın kareleri alındığında kübitin $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ durumunda bulunma olasılığı elde edilir. Kısaca:

$|\alpha|^2$: $|\psi\rangle$' nin $|0\rangle$ durumunda bulunma olasılığını verir.

$|\beta|^2$: $|\psi\rangle$' nin $|1\rangle$ durumunda bulunma olasılığını verir.

Olasılıkların toplamı ise 1' e eşit olmalıdır:

$$|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1 \qquad \text{(Eşitlik 104)}$$

$$|\alpha|^2 = (\alpha)(\alpha^*), \;\; |\beta|^2 = (\beta)(\beta^*) \qquad \text{(Eşitlik 105)}$$

Burada α^*,α‘ nın; β^*, β‘ nın karmaşık eşleniğidir.

2.1.4.2. Kuantum Dolanıklılık

1935 yılında Einstein; Boris Podolsky ve Nathan Rosen isimli iki klasik fizikçi ile Einstein-Podolsky-Rosen Paradoksu olarak bildiğimiz bir düşünce deneyi üzerine kuantum dolanınıklıkla ilgili bir çalışma yayınlamıştır (EPR deneyi)(Einstein vd., 1935). Bu deneye göre birbirine yeterli yakınlıkta duran iki parçacık arasında bir bağ oluşuyor. Birbirleriyle etkileşen bu iki parçacığın hareketleri birbiriyle bağımlıdır. Bu parçacıkları birbirinden ayırıp aralarına kilometrelerce mesafe koyduğumuzda biliyoruz ki her biri biz ölçene kadar süperpozisyon halindeler. Bu parçacıklardan birini ölçüyoruz ve saat yönünde dönüyorsa o anda biliyoruz ki diğer parçacık saat yönünün tersine dönüyor. Aynı anda diğer parçacığı da ölçüyoruz. Bakıyoruz evet saat yönünün tersine dönüyor. Mesafe ne kadar uzak olursa olsun birini ölçtüğümüzde diğerinin dönüş yönü de bulunmuş oluyor. Bu özellikte olan parçacıklara dolanık parçacıklar denir. İki veya daha fazla kuantum parçacığının fiziksel özelliklerinin bağlı olduğu bir durum olan dolanıklılık klasik fizikle açıklanamaz. Dolanıklılığı somut olarak açıklayalım. Şimdi iki ayrı fiziksel sistemden oluşmuş bir bileşik sistem oluşturalım. Eğer iki sistemi nasıl birleştirdiğimizi öğrenirsek ikiden fazla sistemi benzer şekilde oluşturabiliriz.

$|A,i\rangle$: A sistemi, i ise sistemin durumunu ifade etsin

$|B,j\rangle$: B sistemi, j ise sistemin durumunu ifade etsin

$|AB,ij\rangle$: AB bileşik sistem olsun, ij ise bileşik sistemin durumunu ifade etsin.

Bileşik sistem

$$|AB,ij\rangle = |A,i\rangle \otimes |B,j\rangle \qquad \text{(Eşitlik 106)}$$

Şeklinde iki durumun tensör çarpımı olarak ifade edilir. Aynı zamanda,

$$|A,i\rangle \otimes |B,j\rangle = |A,i\rangle |B,j\rangle \qquad \text{(Eşitlik 107)}$$

şeklinde de gösterilebilir.

$$\langle Ai';Bj'|Ai,Bj\rangle = (\langle A,i'|\langle B,j'|)(|A,i\rangle|B,j\rangle) \qquad \text{(Eşitlik 108)}$$

$$|\langle Ai';Bj'|Ai,Bj\rangle|^2 = |\langle A,i'|A,i\rangle|^2|\langle B,j'|B,j\rangle|^2 \qquad \text{(Eşitlik 109)}$$

A sistemi i,B ise j durumunda hazırlandığında A'nın i' ve B'nin j' durumunda bulunma ihtimali;

$$P(i', j' | i, j) = P(Ai' | Ai)P(Bj' | Bj) \qquad \text{(Eşitlik 110)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $P(Ai' | Ai)$; Ai durumunda hazırlandığında ve ölçüm yapıldığında i' durumunda bulunma ihtimalidir. $P(Bj' | Bj)$ ise Bj durumunda hazırlandığında ve ölçüm yapıldığında j' durumunda bulunma ihtimalidir.

Görüldüğü gibi bileşik sistem hakkında hesaplanan olasılık, tek tek sistemler hakkında hesaplanan olasılıkların çarpımı oluyor. Ayrıca bileşik sistemlerin sistemi oluşturan alt sistemlerin tensör çarpımı şeklinde ifade edilmesi kuantum mekaniğinin bir postülası olarak da alınabilir.

$|A\rangle$ ve $|B\rangle$ bir fiziksel sistemdir.

$|AB\rangle = |A\rangle|B\rangle$

$|AB\rangle$ bileşik sisteminin bu şekilde yazılıyor olması en genel durum değildir. $|AB\rangle$ bileşik sisteminin $|A\rangle|B\rangle$ şeklinde yazılıyor olması ancak özel bir durum için geçerlidir. Eğer $|A\rangle$ ve $|B\rangle$ arasında bir korelasyon yoksa $|AB\rangle = |A\rangle|B\rangle$ şeklinde yazılabilir. Yani $|A\rangle$ hakkında yaptığımız herhangi bir ihtimal hesabı, $|B\rangle$' nin durumundan bağımsız ise; ancak $|AB\rangle = |A\rangle|B\rangle$ şeklinde yazılabilir. Eğer $|A\rangle$ veya $|B\rangle$' nin herhangi bir özelliği hakkında yapılan ihtimal hesabı; diğer sistemin durumuna bağlı ise o halde $|AB\rangle \neq |A\rangle|B\rangle$ olur. $|A\rangle$ sistemi ile ilgili yapılan bir ihtimal hesabının sonucu $|B\rangle$ sisteminin durumuna bağlı ise $|AB\rangle$ durumu dolanık bir durumdur denir. $|AB\rangle$ bileşik sistemini $|A\rangle$ ve $|B\rangle$ arasında ister korelasyon olsun ister olmasın alt sistemleri cinsinden en genel olarak;

$$|A, i; B, j\rangle = \sum_{i,j} C_j \, |A, i\rangle|B, j\rangle \qquad \text{(Eşitlik 111)}$$

şeklinde yazılır. Örneğin; sistemlerinden bir tanesi ψ sistemi olsun, n de onun durumlarını göstersin; ikincisi ise Φ sistemi olsun. m de durumlarını göstersin

$|\psi\Phi, nm\rangle = |\psi, n\rangle|\Phi, m\rangle$

$\langle\psi\Phi, nm| = \langle\psi, n|\langle\Phi, m|$

İç çarpımını yaparsak;

$\langle \psi\Phi, n'm' | \psi\Phi, nm \rangle = \langle \psi, n' | \psi, n \rangle \langle \Phi, m' | \Phi, m \rangle$

olur ve durumumuz nm durumunda iken n'm' olma ihtimali;

$P_{n'm'} = P_{n'} P_{m'}$ şeklinde ifade edilir.

Örneğin $|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ iki kübitlik sistemin bir durumu olsun. $|A\rangle$ ve $|B\rangle$ ise tek birer kübitlik iki sistemin durumları olsun. $|\psi\rangle$ durumunun dolanık olup olmadığını araştıralım.

$|A\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle,$

$|B\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$

$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} |\psi\rangle \stackrel{?}{=} |A\rangle|B\rangle$

Soruyu çözmeden önce $|00\rangle$ ve $|11\rangle$ durumlarını yazalım:

$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$

bu üç gösterimde aynı şeyi ifade eder. Aynı şekilde

$|11\rangle = |1\rangle|1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$

yazılır. Vektör halini yazmak istersek;

$$|00\rangle = \binom{1}{0} \otimes \binom{1}{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = \binom{0}{1} \otimes \binom{0}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi sorumuza dönelim; $|\psi\rangle = |A\rangle|B\rangle$ olarak yazılıp yazılamayacağını araştıralım:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \stackrel{?}{=} (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \overset{?}{=} \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|10\rangle + \beta_1\beta_2|11\rangle$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha_1\beta_2 = 0 \\ \beta_1\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \beta_1\alpha_2 = 0 \end{pmatrix} \text{olmalıdır.}$$

Şimdi bu katsayılara biraz daha yakından bakalım:

$$\alpha_1\beta_2 = 0 \text{ ise } \alpha_1 = 0 \ veya \ \beta_2 = 0$$
$$\beta_1\alpha_2 = 0 \text{ ise } \beta_1 = 0 \ veya \ \alpha_2 = 0$$

Ancak aynı zamanda

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ve } \beta_1\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Görüldüğü gibi aynı anda bu şartları sağlayacak α ve β katsayılarını bulmak mümkün değildir. Bu sebepten dolayı $|\psi\rangle \neq |A\rangle|B\rangle$ dır. Yani $|\psi\rangle$ durumu dolanık bir durumdur. Peki, $|AB\rangle$ bileşik sistemini $|A\rangle$ ve $|B\rangle$ alt sistemleri cinsinden en genel olarak nasıl yazabiliriz?

$$|A, i; B, j\rangle = \sum_{i,j} C_j \ |A, i\rangle|B, j\rangle$$

$|A\rangle$ ve $|B\rangle$ durumları arasında ister korelasyon olsun, ister olmasın yukarıdaki durum genel olarak yazılabilecek bir durumdur.

Peki $|\psi\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ durumunu $|A\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ ve $|B\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$ alt durumları cinsinden nasıl yazabiliriz?

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} = \sum_{i,j} C_{ij} \ |A, i\rangle|B, j\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} = C_{00}\,\alpha_1\beta_1|00\rangle + C_{01}\,\alpha_1\beta_2|01\rangle + C_{10}\,\beta_1\alpha_2|10\rangle + C_{11}\,\alpha_2\beta_2|11\rangle$$

Burada $C_{00} = 1$ $C_{01} = 0$ $C_{11} = 1$ $C_{10} = 0$ dır.

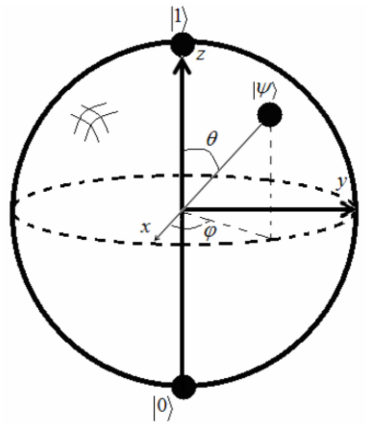
2.1.4.3. Yoğunluk Matrisi

Bir kuantum durumu hakkında elde edilebilecek bütün bilgileri içinde barındıran pozitif, birim izli ve hermityen olan işlemci türüdür. Yoğunluk işlemcisi ya da geleneksel adıyla yoğunluk matrisi kuantum durumunun saf bir durum mu yoksa saf olmayan bir durum mu olduğunu da gösteren işlevsel bir yapıdır. ρ ile ifade edilen yoğunluk işlemcisinin spektral ayrışımı ρ_i bulunma olasılıklarını yani özdeğerlerini ve $|\psi_i\rangle$ bulunulabilecek ortanormal durumları temsil etmek üzere şu şekildedir:

$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \ldots |\psi_i\rangle\}$bir kuantum mekaniksel durum kümesi, $\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\ldots \rho_i\}$ ihtimal kümesi ise; yoğunluk işlemcisi

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} P_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{(Eşitlik 112)}$$

gibi ifade edilir. Yukarıdaki ifadede sıfırdan farklı sadece bir tane bulunma olasılığı varsa bu yoğunluk işlemcisi saf durumu temsil etmektedir ve $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ şeklinde ifade edilir.



Şekil 1. Bir kübitin Bloch küresindeki gösterimi

Birim kürenin koordinat bileşenleri yerlerine yazıldığında yoğunluk matrisi şeklinde basitleştirilmiş olur:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \quad \text{(Eşitlik 113)}$$

Kübit durumu irdelendiğinde Bloch vektörlerinin R^3 uzayındaki birim kürenin üzerinde veya içerisinde kalan r(x, y, z) noktalarının her biri geçerli bir kübit durumuna aittir. Birim kürenin koordinat bileşenleri, $0 \leq \theta \leq \boldsymbol{\pi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\boldsymbol{\pi}$, $0 \leq r \leq 1$ olmak kaydıyla şu şekildedir**:**

$$x = \mathrm{rSin}\theta\mathrm{Cos}\varphi \qquad \text{(Eşitlik 114)}$$

$$y = \mathrm{rSin}\theta\mathrm{Sin}\varphi \qquad \text{(Eşitlik 115)}$$

$$z = \mathrm{rCos}\theta \qquad \text{(Eşitlik 116)}$$

Keyfi bir saf ρ durumunun matris formu şöyle yazılabilir.

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\emptyset}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\emptyset}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 117)}$$

Bilinen trigonometrik dönüşümler yapılarak yoğunluk matrisi

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & e^{i\emptyset}\sin\theta \\ e^{i\emptyset}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 118)}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliği en basit formuna indirgemek ve saf olmayan durumlar için de geçerli bir hale getirmek üzere pauli matrisleri*(σ_x ,σ_y , σ_z)* ve birim matris (I)

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 119)}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z\right) \qquad \text{(Eşitlik 120)}$$

olarak elde edilir. Yoğunluk matrisi için en genel ifadeye ulaşmak amacıyla r(x, y, z) ve $\sigma = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ vektörleri yerlerine yazıldıktan sonra:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + r\sigma)(r \leq 1) \qquad \text{(Eşitlik 121)}$$

sonucuna ulaşılır. Kübit için en genel yoğunluk işlemcisi elde edilmiş oldu. Hem saf durumlar hem de saf olmayan durumlar için geçerli olan bu ifade sayesinde kübit durumları ile birim küredeki noktalar arasında bire bir eşleşme sağlanır.

2.1.4.4. İndirgenmiş Yoğunluk Matrisi

Birden fazla sistemin durum uzayı, her bir sistemin durum uzaylarının tensör çarpımı şeklinde verildiğini biliyoruz. 1,2,3, …, n tane sistemimiz olsun. i' inci sistem ρ_i durumunda hazırlanmış olsun. Sistemin toplam yoğunluk matrisi;

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_n \quad \text{(Eşitlik 122)}$$

ile verilir. Dilersek bunu Kuantum Mekaniği' nin bir postülası olarak alabiliriz. İndirgenmiş yoğunluk matrisi, verilen bir bileşik sistemi oluşturan alt sistemlerin yoğunluk matrislerini elde etmek için kullanılan bir işlem sonucudur. ρ^{AB}, A ve B fiziksel sistemlerine ait yoğunluk matrisi olsun. A sistemine ait indirgenmiş yoğunluk matrisi;

$$\rho^A = tr_B(\rho^{AB}) \quad \text{(Eşitlik 123)}$$

şeklinde elde edilir. tr_B; kısmi iz öperatörü denir ve B sistemi üzerinden, B sistemine ait matrisin izini hesaplar.

$$\rho^{AB} = |a_1 b_1\rangle\langle a_2 b_2| \quad \text{(Eşitlik 124)}$$

olmak üzere bu ifadenin izi $tr_B(\rho^{AB})$

$$tr_B(\rho^{AB}) = tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \quad \text{(Eşitlik 125)}$$

$$tr_B(\rho^{AB}) = |a_1\rangle\langle a_2|\, tr\,(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad \text{(Eşitlik 126)}$$

$$\rho^A = tr_B(\rho^{AB}) = |a_1\rangle\langle a_2|\langle b_2|b_1\rangle \quad \text{(Eşitlik 127)}$$

olur. Bu, A alt sistemine ait yoğunluk matrisidir.

$$\rho^A = |a_1\rangle\langle a_2|\langle b_2|b_1\rangle \quad \text{(Eşitlik 128)}$$

Burada $|a_1\rangle$ ve $|a_2\rangle$ A durum uzayındaki herhangi iki vektör,$|b_1\rangle$ ve $|b_2\rangle$ ise B durum uzayında herhangi iki vektör, ρ^A ise, A alt durum uzayına ait yoğunluk matrisidir. Aynı şekilde B alt durum uzayına ait yoğunluk matrisini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$\rho^B = tr_A(\rho^{AB}) \quad \text{(Eşitlik 129)}$$

Eşitlik(129), eşitlik(130)' da yerine yazılırsa,

$$\rho^B = tr_A(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \quad \text{(Eşitlik 130)}$$

$$\rho^B = tr(|a_1\rangle\langle a_2|)|b_1\rangle\langle b_2| \quad \text{(Eşitlik 131)}$$

$$\rho^B = |a_1\rangle\langle a_2||b_1\rangle\langle b_2| \quad \text{(Eşitlik 132)}$$

elde edilir.

2.2. Kuantum Bilgi Teorisi

2.2.1. Kuantum Mantık Kapıları

Klasik bilgisayar devreleri kablo ve mantıksal kapılardan oluşur. Kablolar bilgiyi taşır. Mantıksal kapılar ise bilgiyi bir halden başka bir hale dönüştürür. Kodlama açısından bu mantık kapılarını belirlemek oldukça önemlidir. Çünkü kanalda oluşabilecek hataya neden olan mantık kapısı bilinmezse hatayı düzeltmek mümkün olmayabilir. Kuantum mantık kapıları hataların karakterize edilmesini sağlar. Tek kuantum kablo en basit devre elemanlarındandır. Boyutu nanometre mertebelerinde olunca kuantum etkiler kendini gösterir. Her ne kadar bir kuantum kabloya en basit devre elemanı desek te, onu oluşturmak o kadar basit değildir. Çünkü kuantum sistemler çok küçük olduğu için çok hassastırlar. Çevreden çok çabuk etkilenirler. Mesela ortamın sıcaklığındaki çok küçük bir değişiklik inşa edilen kuantum durumunu çok kolay bir şekilde bozabilir. Bu kuantum durumunu muhafaza edebilmek için, kablolar çok küçük sıcaklıkta tutulmalıdır. Kuantum kablo, sistemin durumunun her noktada aynı olduğu bir fiziksel ortamdır.

$|0\rangle$ ——————— tek kübit kablo

$|0\rangle$ ———————

$|0\rangle$ ——————— iki kübit kablo $|00\rangle$

2.2.1.1. X Kapısı

Lojik kapılar, bilgiyi manifüle eden, değiştiren işleyen devre elemanlarıdır. Klasik bilgisayarlarda NOT kapısı vardır. Bu klasik tek bit lojik kapısı 0(sıfır) durumunu 1(bir) ve 1(bir) durumunu 0(sıfır) olarak değiştirir. NOT kapısının matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 133)}$$

$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$; $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ dönüştürecek bir fonksiyon var mıdır?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X|0\rangle = |1\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X|1\rangle = |0\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X:Kuantum NOT kapısı

Bildiğimiz gibi klasik bitten farklı olarak kuantum bit, muhtemel iki durumun süper pozisyonu olan durumda da olabiliyordu. NOT kapısının bu süper pozisyon durumuna etkisi lineerdir.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad \text{(Eşitlik 134)}$$

$$X|\psi\rangle = \alpha X|0\rangle + \beta X|1\rangle = \alpha'|1\rangle + \beta'|0\rangle = |\psi'\rangle \qquad \text{(Eşitlik 135)}$$

Kuantum mantık kapılarda tek bir şart sağlanmalıdır. Hem $|\psi\rangle$ hem de $|\psi'\rangle$ boyu 1(bir) birim olmalıdır. Çünkü normalizasyon koşulu bunu gerektirir. Yani katsayılar

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \text{ ve } |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1 \qquad \text{(Eşitlik 136)}$$

koşullarını sağlarlar. Diğer bir ifadeyle X kapısı $|\psi\rangle$ durumunu değiştirir ama vektörün boyunu değiştirmez.

$$\||\psi\rangle\| = \||\psi'\rangle\| \qquad \text{(Eşitlik 137)}$$

$$\||\psi\rangle\|^2 = \|X|\psi\rangle\|^2 \qquad \text{(Eşitlik 138)}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|X^{+}X|\psi\rangle \qquad \text{(Eşitlik 139)}$$

$$X^{\dagger}X=I \qquad \text{(Eşitlik 140)}$$

X üniter bir matristir. Bu şartı sağlayan tüm matrisler bir kuantum lojik kapısı olabilir.

2.2.1.2. Y Kapısı

Y kapısının matris gösterimi $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Y|0\rangle = i|1\rangle}; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Y|1\rangle \to -i|0\rangle}$$

$$Y^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 141)}$$

$$Y^{\dagger}Y=I \qquad \text{(Eşitlik 142)}$$

Y, hem hermityen hem üniter bir matristir.

2.2.1.3. Z Kapısı

Z kapısı 0(sıfır) durumunu 0(sıfır) ve 1(bir) durumunu -1(eksi bir) olarak değiştirir.

$|0\rangle \to |0\rangle, |1\rangle \to -|1\rangle$

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 143)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Z|0\rangle = |0\rangle$ $\qquad$ $Z|1\rangle = -|1\rangle$

$$Z^{\dagger}Z = I \qquad \text{(Eşitlik 144)}$$

Z üniter bir matristir.

2.2.1.4. Hadamard Kapısı

$$H|0\rangle = \frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}} \qquad \text{(Eşitlik 145)}$$

$$H|1\rangle = \frac{(|0\rangle-|1\rangle)}{\sqrt{2}} \qquad \text{(Eşitlik 146)}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{(Eşitlik 147)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \text{(Eşitlik 148)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \qquad \text{(Eşitlik 149)}$$

H=I olduğunu gösterelim

$$H^{\dagger}H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I \qquad \text{(Eşitlik 150)}$$

Hadamard kapısının etkisi, tek kübiti süper pozisyon durumuna sokar. Yukarıdaki lojik kapıları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{X} \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle \qquad \text{(Eşitlik 151)}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{Y} i\left(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\right) \qquad \text{(Eşitlik 152)}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{Z} \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \qquad \text{(Eşitlik 153)}$$

$$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \xrightarrow{H} \alpha\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)+\beta\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(Eşitlik 154)}$$

2.2.1.5. Kontrol Değil Kapısı (CNOT)

CNOT kapısı iki giriş kübitten oluşur. Birinciye kontrol kübit, ikinciye ise hedef kübit denir. CNOT kapısı şöyle çalışır: Eğer kontrol kübit sıfır ise hedef kübit olduğu gibi kalır. Eğer kontrol kübit bir ise o zaman hedef kübit değiştirilir.

$$|00\rangle \xrightarrow{CNOT} |00\rangle \quad \text{(Eşitlik 155)}$$

$$|01\rangle \xrightarrow{CNOT} |01\rangle \quad \text{(Eşitlik 156)}$$

$$|10\rangle \xrightarrow{CNOT} |11\rangle \quad \text{(Eşitlik 157)}$$

$$|11\rangle \xrightarrow{CNOT} |10\rangle \quad \text{(Eşitlik 158)}$$

Genel olarak şu şekilde yazabiliriz.

$$|x, y\rangle \xrightarrow{CNOT} |x, y \oplus x\rangle \quad \text{(Eşitlik 159)}$$

$$0 \oplus 0 \xrightarrow{CNOT} 0 \quad \text{(Eşitlik 160)}$$

$$0 \oplus 1 \xrightarrow{CNOT} 1 \quad \text{(Eşitlik 161)}$$

$$1 \oplus 0 \xrightarrow{CNOT} 1 \quad \text{(Eşitlik 162)}$$

$$1 \oplus 1 \xrightarrow{CNOT} 0 \quad \text{(Eşitlik 163)}$$

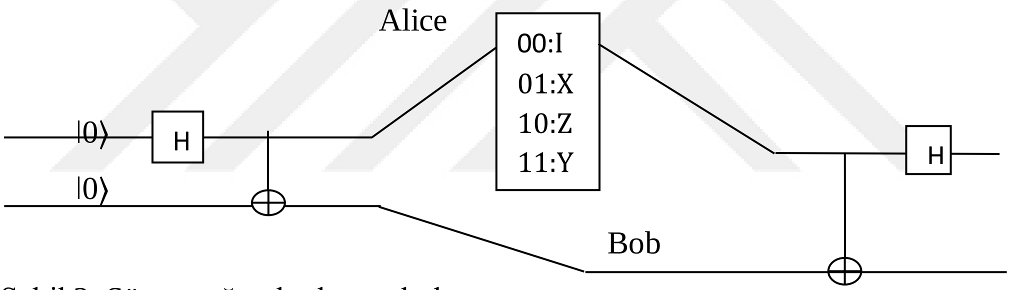
2.3. Süper Yoğun Kodlama

Klasik bilgi, kuantum kanalları kullanılarak gönderilebilir mi? Bu işlem etkili bir şekilde nasıl gerçekleştirilir? Soruları ortaya çıkınca bu alanda bazı önemli gelişmeler olmuştur. 1992’de Charles Bennett ve Stephen Wiesner iki tane klasik bit içeren bilginin sadece bir tane kübit kullanılarak göndericiden alıcıya nasıl iletilebileceğini açıklamışlardır(Bennett vd., 1993). Gerçekleştirilen bu işleme “yoğun kodlama’’ adı verilmiştir. Böylece yoğun kodlama protokolü, ilk kez Bennett ve Wiesner tarafından türetilmiş oldu.

Prosedür şu şekilde işliyor. Birbirlerinden çok uzaktaki Alice ve Bob adındaki iki kişi birbirleri ile birtakım klasik bilgi alışverişinde bulunmak istiyorlar ancak sadece kübit paylaşımında bulunabiliyorlar. Alice' nin amacı 2(iki) bitlik bir klasik bilgi dizisini Bob'a göndermek. Ancak sadece bir kübitlik bilgiyi Bob ile paylaşabiliyor. Üçüncü bir kişi (hava diyelim) önceden dolanık bir durum hazırlayıp bir kübitini Alice' e, diğer kübitini ise Bob'a gönderiyor.

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \text{(Eşitlik 164)}$$

Bu dolanık durumda birinci kübit Alice' de, ikinci kübit ise Bob' dadır. Bu durumu önceden Hava hazırlıyor. Alice ve Bob'a birer kübit verip onları kapılardan geçiriyor.



Şekil 2. Süper yoğun kod protokol şeması

Süper yoğun kod protokolünü adım adım anlatalım:

Hava iki kübitlik ($|00\rangle$) bir durumla başlayıp, birinci kübiti Hadamard kapısından geçirdikten sonra sonuç durumu CNOT kapısından geçirerek $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ dolanık durumunu oluşturuyor. Bu iki kübitlik dolanık durumun birinci kübitini Alice'e ikinci kübitini de Bob'a gönderiyor. Diyelim ki Alice 00 klasik bilgi dizisini Bob'a göndermek istiyor. O halde kendi kübitini hiç değiştirmeden Bob'a gönderir. Bob Alice' den gelen kübiti alınca elinde $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ durumu vardır. Bob önce bu duruma CNOT kapısını uygular.

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{CNOT} \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \text{(Eşitlik 165)}$$

Daha sonra Bob bu durum vektörünü Hadamard kapısından geçirir.

$$\frac{|00\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{Hadamard} \frac{\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(|00\rangle+|10\rangle+|00\rangle-|10\rangle\right)=|00\rangle \quad \text{(Eşitlik 166)}$$

Bu işlemler sonucunda Bob $|00\rangle$ durumunun %100 ihtimalle elde eder ve Alice'in kendisine 00 klasik bilgi dizisini gönderdiğini anlar.

Diyelim ki Alice Bob'a 10 klasik bilgi dizisini Bob'a göndermek istesin. Bu durumda Alice kendi kübitini Z kapısından geçirir ve Bob'a gönderir. Bob'un elindeki durum:

$$\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{Z} \frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 167)}$$

Denklem(168) şeklinde olur. Bob aynı şekilde bu durumu önce CNOT kapısından sonra da Hadamard'tan geçirerek aşağıdaki durumu elde eder.

$$\frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{CNOT} \frac{|00\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} \frac{\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle-\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2}\left(|00\rangle+|10\rangle-|00\rangle+|10\rangle\right)=|10\rangle \quad \text{(Eşitlik 168)}$$

Görüldüğü gibi Bob %100 ihtimalle $|10\rangle$ durumunu elde eder. Bu durumu ölçtüğünde bu iki kübitlik durumun değerini 10 olarak ölçer ve Alice' in kendisine 10 bilgi dizisini gönderdiğini anlar.

Diyelim ki Alice Bob'a 01 bilgi dizisini göndermeye çalışsın. Bu durumda Alice kendi kübitini X kapısından geçirerek Bob'a gönderir. Bob Alice' in kübitini alınca aşağıdaki duruma sahip olur.

$$\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{X(Alice)} \frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 169)}$$

Şimdi Bob $\frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$ durumuna sahiptir. Bob bu durumu önce CNOT kapısından sonra da Hadamard kapısından geçirerek ölçüm gerçekleştirir.

$$\frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{CNOT} \frac{|11\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} \frac{\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}|1\rangle-\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2}\left(|01\rangle-|11\rangle+|01\rangle+|11\rangle\right)=|01\rangle \quad \text{(Eşitlik 170)}$$

Görüldüğü gibi Bob %100 ihtimalle $|01\rangle$ durumunu elde eder ve ölçüm yaptığında %100 ihtimalle 01 bilgi dizisinin Alice tarafından kendisine gönderildiğini keşfeder.

Son olarak diyelim ki Alice Bob'a 11 bilgi dizisini göndermeye çalışsın. Bu durumda Alice kendi kübiti iY kapısından geçirerek Bob'a gönderir. Bu işlemden sonra Bob aşağıdaki duruma sahip olur.

$$\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{iY} i\left(\frac{i|10\rangle-i|01\rangle}{\sqrt{2}}\right)=\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 171)}$$

Bob'un elindeki durum şimdi $\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$ durumudur. Her zamanki gibi Bob bu durumu önce CNOT kapısından sonra da Hadamard kapısından geçirerek ölçüm işlemini gerçekleştirir.

$$\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{CNOT} \frac{|01\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{H} \frac{1}{2}\left[\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|1\rangle-\left(|0\rangle-|1\rangle\right)|1\rangle\right] \rightarrow \frac{1}{2}\left[|01\rangle+|11\rangle-|01\rangle+|11\rangle\right]=|11\rangle \quad \text{(Eşitlik 172)}$$

Bob bu durumu ölçerse %100 ihtimalle 11 elde eder ki o da Alice' in kendisine gösterdiği klasik bit dizisidir. Buna süper yoğun kodlama denir.

Şimdi süper yoğun kodlama ile ilgili bazı noktalara işaret edelim. Alice'in yaptığı operasyonlar sonucu ortaya çıkan durumlara Bell durumları denir. Bu durumlara $|B_{00}\rangle, |B_{01}\rangle,\ |B_{10}\rangle$ ve $|B_{11}\rangle$ diyelim.

$$|B_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 173)}$$

$$|B_{01}\rangle = \frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 174)}$$

$$|B_{10}\rangle = \frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 175)}$$

$$|B_{11}\rangle = \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 176)}$$

Bu durumlar ortonormal bir vektör seti oluştururlar. Yani

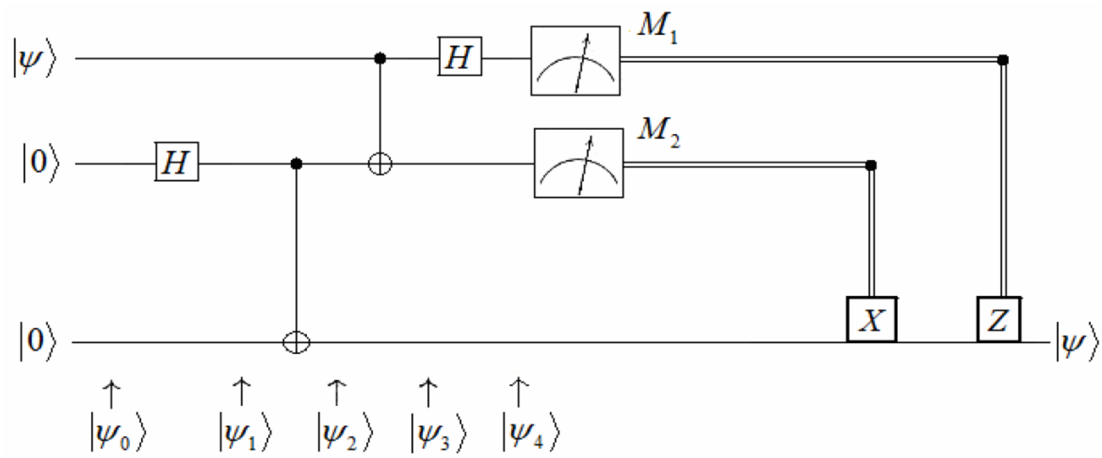
$$\langle B_{00}|B_{00}\rangle = 1 \qquad \langle B_{01}|B_{10}\rangle = 0$$
$$\langle B_{01}|B_{01}\rangle = 1 \qquad \langle B_{00}|B_{11}\rangle = 0 \qquad \text{(Eşitlik 177)}$$
$$\langle B_{10}|B_{10}\rangle = 1 \qquad \langle B_{11}|B_{11}\rangle = 1$$

eşitliklerini sağlarlar. Bu durumlar ikişer ikişer alındığından ortogonol olduklarından birbirlerinden ölçüm yolu ile ayrılabiliyorlar. İkinci önemli nokta;bu bilgi paylaşımının ancak ve ancak Alice ve Bob aralarında dolanık bir durumu paylaşmaları ile mümkün olduğudur. Eğer Hava'nın oluşturduğu ve Alice ile Bob arasında paylaştığı durum dolanık bir durum değil ise, bu şekilde bir mesajlaşma mümkün olmayacaktır.

2.4. Kuantum Işınlama

Kuantum ışınlama, bir kuantum durumunu bir yerden başka bir yere gönderme tekniğidir. Burada kuantum durumunu gönderen ile o durumu alan arasında bir fiziksel bağ olmasına gerek yoktur. Ancak bir kuantum kanala ihtiyaç vardır. Bu kanal kuantum dolanıklılıktır. Kuantum ışınlamada bir parçacığın ya da atomun uzak bir yere gönderilmesinden ziyade o parçacığın taşıdığı kuantum bilgisinin aktarılmasından söz edilir. Kuantum ışınlamanın temel ilkesi, bir teoriden öte matematik desteğiyle deneysel olarak da incelenebilmesidir. Bir kuantum sistemini ışınlamak için o sistemin kuantum durumu gereklidir. Kuantum ışınlamada herhangi bir madde aktarımı söz konusu değildir. Işınlama, dolanık durumların ilginç bir uygulamasıdır. Aynı zamanda kuantum bilgi transferine imkân sağlayan uygulamalara da sahiptir. Işınlama, $|\varphi\rangle$ bilinmeyen bir durumundaki bir kübiti gönderme yöntemidir. Bu işlem, eğer başlangıçta aşağıda açıklanacak olan dolanık bir Bell durumu iki kişi tarafından biliniyorsa bunlardan birinin diğerine iki klasik bit göndermesiyle gerçekleştirilir. Kuantum ışınlama şu şekilde çalışır: Alice ve Bob adı altında iki kişi alalım. Alice ve Bob buluştuklarında Bell durumlarından birini oluşturup, ayrıldıklarında her birisi bu durumun birer kübitini yanlarına alırlar. Daha sonra Alice Bob'a bir $|\psi\rangle$ durumu göndermek ister. Alice ile Bob arasında herhangi bir fiziksel bağ olmadığı için, aralarında bir kübit paylaşımı mümkün değildir. Ancak Alice ile Bob arasında klasik bilgi paylaşımı olabilir. Bu şartlar altında Alice Bob'a $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ durumunu gönderebilir mi?

Alice, Bob'a klasik bir kanalla $|\psi\rangle$ durumunu kesin olarak bildiremez. Çünkü Alice, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+ \beta\ |1\rangle$ durumunda α ve β sayılarının ikisini de aynı anda bilemez.α ve β sürekli değerler alabildikleri için, Alice' in tüm muhtemel α ve β' ları göndermesi için sonsuz zamana ihtiyacı vardır. Aynı şekilde Bob' unda tüm muhtemel α ve β' ları alıp işlemesi sonsuz zaman alacaktır. Ancak Kuantum Işınlama devresi bu transfer işini mümkün kılar. Kuantum Işınlamada Alice $|\psi\rangle$ durumunu Bob' a göndermeyi başarır. Ancak bunun için Alice' in Bob ile 2(iki) kübitlik bir klasik bilgi paylaşımında bulunması gerekir. Kuantum Işınlama devresi aşağıdaki gibidir:



Şekil 3. Kuantum ışınlama devresi

Burada $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ Alice' in Bob'a ışınlamak istediği durumdur. $|B_{00}\rangle$ ise daha önceden Alice ve Bob' un birer kübitini paylaştıkları Bell durumlarından bir tanesidir.

$$|B_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{(Eşitlik 178)}$$

Bu Bell durumundan birinci kübit Alice' in ikinci kübit ise Bob' undur. Bu durumun dolanık bir durum olduğunu tekrar hatırlayalım. Bu devrede Alice göndermek istediği $|\psi\rangle$ durumunu, Bob ile paylaştığı dolanık durumun kendisine ait kübiti ile etkileştirir. Bu devrenin çeşitli bölgelerindeki durumları $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ ve $|\psi_4\rangle$ olarak adlandırdıktan sonra bu durumları yazalım.

$$|\psi_1\rangle = |\psi\rangle|B_{00}\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\left(\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle] \quad \text{(Eşitlik 179)}$$

Bu durumun ilk 2(iki) kübitinin Alice'e, üçüncü kübitin ise Bob'a ait olduğunu hatırlayalım. Bu aşamada Alice kendi kübitlerini CNOT kapısından geçirdikten sonra tüm devre dikkate alındığında durum vektörü $|\psi_2\rangle$ olur.

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle\right] \quad \text{(Eşitlik 180)}$$

CNOT’ dan sonra Alice kendi kübitlerinden ilkini Hadamard kapısından geçirir. Tüm devredeki durum vektörü $|\psi_3\rangle$ olur.

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|00\rangle + \alpha\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|11\rangle + \beta\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}|10\rangle + \beta\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}|01\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle\right] \quad \text{(Eşitlik 181)}$$

$|\psi_3\rangle$ durumunu düzenlersek;

$$|\psi_3\rangle = \tfrac{1}{2}|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \tfrac{1}{2}|01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \tfrac{1}{2}|10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + \tfrac{1}{2}|11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \quad \text{(Eşitlik 182)}$$

$|\psi_3\rangle$durumunun bu yeniden düzenlendiği durumda Alice’ in kübitleri ile Bob’ un kübitleri ayrı ayrı yazıldı. Bu aşamada Alice kendi kübitlerini ölçer. Bu ölçüm sonucunda belli ihtimaller ile belli değerler elde eder. Alice kendi kübitlerini ölçtüğünde her birini $\frac{1}{4}$ ihtimalle kendi kübitlerinin değerini 00, 01, 10 ve 11 olarak ölçer. Alice ölçüm sonucunda hangi değerleri elde etmişse, bunu klasik bir kanalla Bob’ a gönderir. Bob ise Alice’ den gelen bilgiye bağlı olarak kendi kübitini belli kapılardan geçirmek sureti ile $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ durumunu elde eder. Böylece Alice Bob’ a bu durumu göndermiş olur.

Işınlama olayında da kübit’ in aktarılaması sırasında önce Alice’ in kübitindeki bilgi silinir. Sonra aynı bilgi Bob’un kübitinde ortaya çıkar. Böylece bir kübitin içeriği, evrenin iki farklı yerinde aynı anda var olamaz (Quantum No Cloning Theorem). Işınlamada parçacıklardan biri üzerinde yapılan ölçüm, nerde olursa olsun diğer parçacığın durumunu anında değiştirir. Alice, Bob’ a $|\psi\rangle$ durumunu gönderdiğinde elinde bu durum hakkında bir bilgi kalmaz. Yani $|\psi\rangle$ durumu Bob’ a taşınır. Bu nedenle yapılan işleme ışınlama denir. Işınlamanın en basit durumu üç kübit içerir. Bunlardan ikisi Alice ile ilgili bir tanesi de Bob ile ilgilidir. Alice’ in elinde durumunu bilmediği birinci parçacık ve Bob’ unkine dolanık olduğunu bildiği ikinci parçacık vardır. Normalde bunlar bağımsız kuantum durumlarına sahiplerdir. Fakat Alice bunları iki kübit kapasiteye sahip fiziksel sistem olarak düşünebilir. Böyle sistem üzerinde yapılacak ölçüm en fazla dört farklı sonuç verecektir. Alice elindeki iki parçacığı en yüksek düzeyde dolanıklaştırarak bir ölçüm alır. Bell durumları olarak adlandırılan dört olası durumdan birine çökmeyle sonuçlanacak ölçüm sonunda bilinmeyen kübitin içeriğinin deforme olmuş bir şekilde Bob’ un kübitine aktarıldığını gösterir**.** Şimdi

Alice' in elde ettiği değerleri ve buna bağlı olarak Bob'un kendi kübitini hangi kapılardan geçireceğine bakalım:

Eğer Alice 00 ölçerse ve bunu Bob'a gönderirse, Bob'un hiçbir şey yapmasına gerek yoktur. Bob zaten $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ durumuna sahiptir.

Eğer Alice 01 ölçerse ve bunu Bob'a gönderirse, bu durumda Bob kendi kübitini X kapısından geçirir ve $|\psi\rangle$ durumuna sahip olur.

Eğer Alice 10 ölçerse ve bunu Bob' a gönderirse, bu durumda Bob kendi kübitini Z kapısından geçirir ve $|\psi\rangle$ durumuna sahip olur.

Eğer Alice 11değerini ölçerse ve bunu Bob'a gönderirse, bu durumda Bob kendi kübitini önce X sonra da Z kapısından geçirerek $|\psi\rangle$ durumuna sahip olur.

3.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Kuantum Hesaplama ve Kuantum Bilgi, kuantum mekanik sistemleri kullanarak bilgiyi işleme çalışmasıdır. 1980'li yılların başlarında, ışık hızından daha hızlı olacak şekilde sinyal gönderiminin mümkün olup olmadığı sorusu gündem olmuştur. Eğer bir kuantum mekanik durum vektörünün kopyalanması mümkün ise, ışık hızından daha hızlı sinyal gönderimi de mümkün olacaktı. Ancak yine 1980'li yılların başlarında keşfedilen bir kuantum durumunun kopyalanamayacağı (quantum no cloning theorem) gerçeği, ışık hızından daha hızlı sinyal gönderiminin mümkün olmadığını göstermiştir. Bu sonuç, kuantum hesaplama ve kuantum bilgi çalışma alanında elde edilen ilk sonuçlardan biri olarak değerlendirilir (Nielsen ve Chuang, 2010)

1993 yılında Benett ve arkadaşları (Bennett vd.,1993) kuantum mekaniğinin en önemli ve ilginç uygulamalarından bir tanesi olan Kuantum Işınlama (Quantum Teleportation) olayını keşfettiler. Araştırmacılar Einstein-Podolski-Rosen Kanalı (Einstein vd., 1935) denilen dolanık bir durumu ($|\psi\rangle = (|00\rangle+|11\rangle)/\sqrt{2}$) kullanarak bir kübitlik durumu ($|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$) bir yerden başka bir yere iki bitlik bir klasik bilgi paylaşımı ile transfer etmenin mümkün olduğunu gösterdiler. Dört yıl sonra bu ışınlama protokolü, deneysel olarak gerçekleştirildi (Bouwmeester vd.,1997). Bu çalışmada, fotonlar fiziksel olarak bağlı olmasa bile bilginin bilgisayar çiplerindeki fotonlar arasında aktarılabileceği gösterilmiş oldu. Bu sonuç, daha hızlı ve daha verimli işlemciler ve sensörler sağlayarak teknoloji, tıp ve bilimde devrim yaratma potansiyeline sahip olan kuantum hesaplamayı geliştirmede önemli bir adım olarak değerlendirilir. Şimdilik maddenin ışınlaması yalnızca bilim kurgu filmlerinde var olsa da, ışınlanma kuantum mekaniğinin atom altı dünyasında mümkündür. Kuantum dünyasında ışınlama, maddenin taşınmasından ziyade bilginin taşınmasını içerir.

Bir kübitlik bir durumun deneysel olarak ışınlanmasının ardından, iki kübitlik bir durumun ($|\psi\rangle = a|00\rangle+b|01\rangle+c|10\rangle+d|11\rangle$) ışınlanıp ışınlanamayacağı sorusu gündeme gelmiştir. Yaklaşık beş yıl sonra, bir grup araştırmacı (Lee vd., 2002), iki kübitlik bir sistemin ışınlanması için bir protokol geliştirdiler ancak bu protokolün açık bir şekilde ifadesi çalışmada yer almamıştır. İki kübitlik sistemin açık bir şekilde ifadesi 3 yıl sonra Rigolin (Rigolin, 2005) tarafından gerçekleştirildi. Bu çalışmada her ne kadar Rigolin N kübitlik bir durumun ışınlanması için bir formülasyon geliştirse de ikiden fazla kübitlik bir durumun ışınlanma protokolü için açık bir çalışma sunamamıştır. İkiden fazla kübitlik bir durumun ışınlanması son derece karışık ve fazla sayıda Bell durumu kullanmayı gerektirir. Örneğin 1(bir) kübitlik durumun ışınlanması 4, 2(iki) kübitlik durumun ışınlanması 16, 3(üç) kübitlik durumun ışınlanması 64, 4(dört) kübitlik bir durumun ışılanması 256, ve nihayet N kübitlik durumun ışınlanması 4^N tane Bell durumu üretmeyi ve kullanmayı gerektirir. Her ne kadar literatürde 3 (üç) kübitlik durumların ışınlaması ile ilgili çalışmalar olsa da, bu ışınlama protokolleri çok karmaşık (Li vd., 2016), okunması zor (Liu vd., 2014) ve hatta bazılarını anlamak imkansız (Li vd., 2019) gibidir.

Bu çalışmada, 3(üç) kübitlik bir durumun ışınlanma protokolü açık bir şekilde oluşturulacaktır. Sonuçlar, N kübitlik bir durumun ışınlama protokolünün oluşturulması için genelleştirilecektir.

3.1. N-Kübitlik Bir Durumun Işınlama Protokolü

Orijinal tek kübitin ışınlama protokolü iki taraf içerir: Alice ve Bob. Alice, Bob' a tek kübitlik bir ($|\psi\rangle_{A_1} = \alpha|0\rangle_{A_1} + \beta|1\rangle_{A_1}$) durumu göndermek ister. Burada A ve B sırasıyla Alice ve Bob' u ifade eder ve α ve β , $|\psi\rangle_{A_1}$ ’ nin normalleştirilmesini istediğimiz için $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ koşulunu sağlayan bilinmeyen genliklerdir. Alice ve Bob, aralarında

$$|\Phi^+\rangle_{A_2B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{A_2B_1} + |11\rangle_{A_2B_1}) \qquad \text{(Eşitlik 183)}$$

maksimum dolanık durumu ifade eden iki kübitlik durumun birer kübitini paylaşarak işe başlarlar. Alice göndermek istediği durum vektörünü, Bob ile dolanık durumdaki iki kübitten kendi payına düşen ile etkileştirir ve eşitlik(185) elde edilir.

$$|\Phi\rangle_{A_1A_2B_1} = |\psi\rangle_{A_1} \otimes |\Phi^+\rangle_{A_2B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle_{A_1A_2B_1} + \alpha|011\rangle_{A_1A_2B_1} + \beta|100\rangle_{A_1A_2B_1} + \beta|111\rangle_{A_1A_2B_1}\right) \qquad \text{(Eşitlik 184)}$$

Burada ilk iki kübit Alice' e ve son kübit ise Bob' a aittir. Yukarıdaki ifade, eşitlik(184)’ te verilen Bell durumları cinsinden yeniden yazılırsa, ortak durum, eşitlik(185)’ teki gibi olur.

$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$, $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ açısından eşitlik(184)' deki ilk iki kübiti yeniden yazarsak

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}[|\Phi^+\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\Phi^-\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |\psi^+\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |\psi^-\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)] \qquad \text{(Eşitlik 185)}$$

şeklini alır. Protokolün bu aşamasında Alice, Bell baz ölçümleri adı verilen $(\Phi^{+}, \psi^{+}, \Phi^{-}, \psi^{-})$ kısmi ölçümler yapar ve Bob, Alice' in ölçüm sonucuna göre başka bir durum vektörüne sahip olur. Daha sonra Alice ölçüm sonucunu klasik bir kanal aracılığıyla Bob' a gönderir; Bob, dört olası sonuçtan birine bağlı olarak orijinal durumu elde etmek için bazı lojik kapılar kullanır. Bu lojik kapılar, tek kübit işlemcileridir. Ölçüm sonuçlarına bağlı olarak Bob, orijinal durumu kurtarmak için sahip olduğu kübite I, Z, X ve ZX lojik kapılarından birini uygular. Bu kapıların veya işlemcilerin, tek kübit durumları üzerindeki eylemleri $\mathrm{I}|0\rangle = |0\rangle$, $\mathrm{I}|1\rangle = |1\rangle$, $\mathrm{X}|0\rangle = |1\rangle$, $\mathrm{X}|1\rangle = |0\rangle$, $\mathrm{Z}|0\rangle = |0\rangle$, $\mathrm{Z}|1\rangle = -|1\rangle$ şeklindedir.

Yukarıda tek kübitlik durumun ışınlanma protokolünü aşağıdaki gibi genelleştirdik. Alice' in rastgele bir N kübit durumunu Bob' a ışınlamak istediğini varsayalım. Işınlamak istediği durum şu şekilde yazılabilir:

$$|\,\psi\rangle_{A_1\ldots\ldots A_N} = \sum_{j=1}^{2^N} \alpha_j \left|x_j\right\rangle_{A_1\ldots\ldots A_N} \qquad \text{(Eşitlik 186)}$$

Eşitlik (187)' de; α_j, $\sum_{j=1}^{2^N} \left|\alpha_j\right|^2 = 1$ sağlayan bilinmeyen genliklerdir ve $x_j \in \{0,1\}$, j sayısının ikili ifadesini söylemenin bir diğer yolu olan 2^N boyutlu uzayda j baz vektördür. Tek kübitlik durumu için (N = 1), $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ dir. İki kübitlik durumu için (N = 2), $x_1 = 00$, $x_2 = 01$, $x_3 = 10$, $x_4 = 11$ dir. Tüm x_j' leri aynı sayıda bit (N bit) yapmak için uygun sayıda sıfırlar eklenmelidir. Alice ve Bob ayrıca

$$|\,b\rangle_{A_1\ldots A_N B_1\ldots\ldots B_N} = \prod_{j=1}^{N} |\,\Phi^{+}\rangle_{A_j B_j} = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \prod_{j=1}^{N} (|00\rangle_{A_j B_j} + |11\rangle_{A_j B_j} \qquad \text{(Eşitlik 187)}$$

durumun N kübitini paylaşırlar. Burada $|\Phi^{+}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ Alice, ışınlanmak istediği durumu $|\,b\rangle_{A_1\ldots\ldots A_N B_1\ldots\ldots B_N}$ ile etkileşime sokar ve

$$|\,\Phi\rangle_{A_1\ldots A_{2N} B_1\ldots\ldots B_N} = |\psi\rangle_{A_1\ldots A_N} \otimes |\,b\rangle_{A_1\ldots A_N B_1\ldots\ldots B_N} = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{j=1}^{2^N} \alpha_j \left|x_j\right\rangle_{A_1\ldots A_N} \otimes \prod_{j=1}^{N} \left(|\,00\rangle_{A_j B_j} + |11\rangle_{A_j B_j}\right) \qquad \text{(Eşitlik 188)}$$

elde eder. Eşitlik(189)'un ikinci kısmı yeniden ifade edildiğinde şu şekilde gösterilebilir:

$$\prod_{j=1}^{N}(|00\rangle_{A_jB_j} + |11\rangle_{A_jB_j}) = \sum_{j=1}^{2^N}|x_j\rangle_{A_j}|x_j\rangle_{B_j} \quad \text{(Eşitlik 189)}$$

Bu eşitliği düzenleyerek

$$|\Phi\rangle_{A_1......A_{2N}B_1......B_N} = \frac{1}{\sqrt{2^N}}\sum_{j=1}^{2^N}|x_j\rangle_{A_1......A_{2N}} \otimes \sum_{k=1}^{2^N}\alpha_k\,|x_k\rangle_{B_1......B_N} \quad \text{(Eşitlik 190)}$$

elde ederiz. $|x_j\rangle_{A_1......A_{2N}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2^N}}|\,b_j\rangle_{A_1......A_{2N}}$ ve $\alpha_k|x_k\rangle_{B_1......B_N} \equiv |\psi_k\rangle_{B_1......B_N}$ tanımlandıktan sonra;

$$|\Phi\rangle_{A_1......A_{2N}B_1......B_N} = \frac{1}{\sqrt{4^N}}\sum_{j=1}^{4^N}|b_j\rangle_{A_1......A_{2N}} \otimes |\psi_j\rangle_{B_1......B_N} \quad \text{(Eşitlik 191)}$$

şekildeki gibi yeniden ifade edilebilir. Görüldüğü gibi, eşitlik(192)'de verilen ortak durum Alice ve Bob'un sahip olduğu kübitler cinsinden yazılmıştır. Alice şimdi kısmi Bell baz ölçümleri yapıyor ve $(\frac{1}{4^N})$ eşit olasılıkla 4^Nsonuçlarından birini elde ediyor ve klasik iletişim kanalı üzerinden 2N adet klasik bilgi bitlerini Bob' a gönderir.

Alice' in ölçüm sonuçlarına göre, Bob, orijinal durumu kurtarmak için uygun üniter işlemcileri uygular. Protokolün başarılı bir şekilde çalışması için, $|\,b_j\rangle_{A_1...A_{2N}}$ ve $|\,\psi_j\rangle_{B_1...B_N}$ durumları 4^N kez yeniden düzenlenebilir olmalıdır. Her yeniden düzenleme için, tek kübit kapıların doğru sırası oluşturulmalı ve $|\,b\rangle_{A_1...A_{2N}}$ ve $|\,\psi\rangle_{B_1....B_N}$ durumları da uygulanmalıdır. Burada bunlara nasıl ulaşılacağını gösterdik.

Elemanları tek kübitli Z ve X işlemcileri olan U ve V olmak üzere iki küme tanımlayalım.

$$\text{U} = \{Z_{\rightarrow i}|1 \leq i \leq N\} \quad \text{(Eşitlik 192)}$$

$$\text{V} = \{X_{\leftarrow i}|1 \leq i \leq N\} \quad \text{(Eşitlik 193)}$$

Eşitlik(193) ve (194), Z ve X bilinen Pauli matrisleridir. $Z_{\rightarrow i}$ soldan sağa i inci kübit üzerine, $X_{\leftarrow i}$ ise sağdan sola i inci kübit üzerine etki eder. Şimdi U ve V' nin P(U) ve P(V) olarak adlandırdığımız güç kümelerini tanımlayalım.

$$P(U) = \{Z_{\rightarrow}: Z_{\rightarrow} \subseteq M\}$$
$$P(V) = \{X_{\leftarrow}: X_{\leftarrow} \subseteq M\} \qquad \text{(Eşitlik 194)}$$

Eşitlik(195)' te P(U) ve P(V) elemanları, birim işlemcisi I olarak tanımladığımız boş küme U ve V kümelerinin kendileri de dahil olmak üzere U ve V' nin tüm alt kümeleri olarak tanımlanır. Diğer iki $\tilde{P}$(U) ve $\tilde{P}$(V) kümelerini, azalan sırayla yazılan iki veya daha fazla elemanlı alt kümeleri dışında, P(U) ve P(V) ile aynı kümeler olarak tanımladık. Örneğin; N = 2 için

$$U=\{Z_{\rightarrow 1}, Z_{\rightarrow 2}\},$$
$$V = \{X_{\leftarrow 1}, X_{\leftarrow 2}\},$$
$$P(U) = \{I, Z_{\rightarrow 1}, Z_{\rightarrow 2}, Z_{\rightarrow 1}Z_{\rightarrow 2}\}$$
$$P(V) = \{I, X_{\leftarrow 1}, X_{\leftarrow 2}, X_{\leftarrow 1}X_{\leftarrow 2}\}$$
$$\tilde{P}(U) = \{I, Z_{\rightarrow 1}, Z_{\rightarrow 2}, Z_{\rightarrow 2}Z_{\rightarrow 1}\}$$
$$\tilde{P}(V) = \{I, X_{\leftarrow 1}, X_{\leftarrow 2}, X_{\leftarrow 2}X_{\leftarrow 1}\}$$

Şimdi P(U) ve $\tilde{P}$(V)'nin kartezyen çarpımını tanımlayalım.

$$P(U)x\tilde{P}(V) = \{(u, v)\big| u \in P(U), v \in \tilde{P}(V)\} \qquad \text{(Eşitlik 195)}$$

Eşitlik(196)'da P(U)x$\tilde{P}$(V) bir 2^Nx 2^Nmatristir, buna Q diyelim. Daha sonra Q matrisi, Q' nun sütunları art arda yazılarak tek bir sütuna dönüştürülür. Bu sütunun j. öğesi Qj olsun.

$$Q_j|b\rangle_{A_1 \ldots\ldots A_{2N}} = |b_j\rangle_{A_1 \ldots A_{2N}} \qquad \text{(Eşitlik 196)}$$

Eşitlik(197)'de,

$$|b\rangle_{A_1 \ldots\ldots A_{2N}} = \prod_{j=1}^{N}(|00\rangle_{2A_j} + |11\rangle_{2A_j}) \qquad \text{(Eşitlik 197)}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $\tilde{P}$(V) ve P(U)' nun başka bir kartezyen çarpımını tanımlayalım ve buna yine 2^Nx 2^N matris olan W diyelim. Bu sefer W matrisi, ardışık olarak yazılarak tek bir sütuna dönüştürülür. Bu sütunun j. elemanı Wj olsun. $|\psi_j\rangle$ durumları ise şu şekilde elde edilebilir:

$$W_j|\psi\rangle_{B_1......B_N} = |\psi_j\rangle_{B_1...B_N} \quad \text{(Eşitlik 198)}$$

$$|\psi\rangle_{B_1......B_N} = \sum_{j=1}^{2^N} \alpha_j |x_j\rangle_{B_1......B_N} \quad \text{(Eşitlik 199)}$$

Alice, $|b_j\rangle_{A_1...A_{2N}}$durumlarından birini eşit olasılıkla ($\frac{1}{4^N}$) ölçer ve Bob' a klasik bir iletişim kanalı aracılığıyla 2N klasik bilgi biti gönderir. Alice' in ölçüm sonuçlarına göre, Bob' un uygulaması gereken işlemciler $\tilde{P}$(U) ve P(V)' nin kartezyen çarpımı olan başka bir 2^Nx 2^N matris tanımlanarak elde edilebilir ve buna R diyebiliriz. R, sütunları arka arkaya yazılarak tek bir sütuna dönüştürülebilir. Bu sütunun j. elemanı Rj olsun.

$$R_j|\psi_1\rangle_{B_1...B_N} = |\psi_j\rangle_{B_1...B_N} \quad \text{(Eşitlik 200)}$$

Eşitlik(200), rastgele bir N kübit durumu için ışınlanma protokolünü başarıyla tamamlar.

Tablo 1. $|b_j\rangle_{A_1...A_{2N}}$ ve $|\psi_j\rangle_{B_1...B_N}$ durumlarının yeniden düzenlenmesinde kullanılacak tek kübit kapıları

Q		W		R	
N=1	N=2	N=1	N=2	N=1	N=2
I	***I***	***I***	***I***	***I***	***I***
$Z_{\rightarrow1}$	$Z_{\rightarrow1}$	Z_1	$Z_{\rightarrow1}$	$Z_{\rightarrow1}$	$Z_{\rightarrow1}$
$X_{\leftarrow1}$	$Z_{\rightarrow2}$	X_1	$Z_{\rightarrow2}$	$X_{\leftarrow1}$	$Z_{\rightarrow2}$
$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow1}$	$Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}$	X_1Z_1	$Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}$	$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow1}$	$Z_{\rightarrow2}\,Z_{\rightarrow1}$
	$X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow1}$
	$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow1}Z_{\rightarrow1}$		$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow1}$
	$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow1}Z_{\rightarrow2}$		$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow1}$
	$Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow1}Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}$		$Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow1}$
	$X_{\leftarrow2}$		$X_{\leftarrow2}$		$X_{\leftarrow2}$
	$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow2}$		$X_{\leftarrow2}Z_{\rightarrow1}$		$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow2}$
	$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow2}$		$X_{\leftarrow2}Z_{\rightarrow2}$		$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow2}$
	$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow2}Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}$		$Z_{\rightarrow2}Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow2}$
	$X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow2}\,X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow1}X_{\leftarrow2}$
	$Z_{\rightarrow1}\,X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}Z_{\rightarrow1}$		$Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow1}X_{\leftarrow2}$
	$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}Z_{\rightarrow2}$		$Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow1}X_{\leftarrow2}$
	$Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}X_{\leftarrow2}X_{\leftarrow1}$		$X_{\leftarrow2}\,X_{\leftarrow1}Z_{\rightarrow1}Z_{\rightarrow2}$		$Z_{\rightarrow2}\,Z_{\rightarrow1}X_{\leftarrow1}X_{\leftarrow2}$

3.2. Uygulama 1: İki kübitlik bir durumun ışınlama protokolü

Rigolin, 2005 yılında iki kübitlik bir durumun ışınlama protokolünü hazırlamayı başardı. Bunun için 16 tane Bell durumu kullanılması gerekmektedir. Rigolin’ in geliştirdiği protokol bir kübitlik durumun ışınlanma protokülüne benzer. Alice ışınlamak istediği durumu $|\psi\rangle$=a$|00\rangle$+b$|01\rangle$+c$|10\rangle$+d$|11\rangle$ daha önce bir araya gelip bu sefer ikişer kübitlerini paylaştıkları dolanık bir durumla etkileştirir. Protokolün doğru bir şekilde çalışması için bu dolanık durumun doğru bir şekilde belirlenmesi gerekir. Bu dolanık durum aşağıda verilmiştir.

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle+|0101\rangle+|1010\rangle+|1111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 201)}$$

$|\psi_1\rangle$ durumunun ilk iki kübitini Alice son iki kübitini ise Bob alır ve uzaklaşırlar. Alice ışınlamak istediği iki kübitlik durumu $|\psi_1\rangle$ durumu ile etkileştirir. Bu etkileşim sonucunda çıkan durum üretilecek olan ve birincisi verilen ($|\psi_1\rangle$) 16 adet Bell durumu cinsinden ifade edilir. Bu aşamadan sonra Alice kendisine ait olan 4 kübitlik durumu ölçer ve elde ettiği 4 bitlik klasik bilgiyi Bob' a gönderir. Bob, Alice' den gelen bilgiye göre, kendi kübitlerini protokole uygun kapılardan geçirerek ışınlanmak istenen durumu inşa eder.

$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle+|0101\rangle+|1010\rangle+|1111\rangle)$ durumu;

$$|B_1\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle+|0101\rangle+|1010\rangle+|1111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 202)}$$

$$|B_2\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle+|0101\rangle-|1010\rangle-|1111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 203)}$$

$$|B_3\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle-|0101\rangle+|1010\rangle-|1111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 204)}$$

$$|B_4\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle-|0101\rangle-|1010\rangle+|1111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 205)}$$

$$|B_5\rangle = \frac{1}{2}(|0001\rangle+|0100\rangle+|1011\rangle+|1110\rangle) \quad \text{(Eşitlik 206)}$$

$$|B_6\rangle = \frac{1}{2}(|0001\rangle+|0100\rangle-|1011\rangle-|1110\rangle) \quad \text{(Eşitlik 207)}$$

$$|B_7\rangle = \frac{1}{2}(|0001\rangle-|0100\rangle+|1011\rangle-|1110\rangle) \quad \text{(Eşitlik 208)}$$

$$|B_8\rangle = \frac{1}{2}(|0001\rangle-|0100\rangle-|1011\rangle+|1110\rangle) \quad \text{(Eşitlik 209)}$$

$$|B_9\rangle = \frac{1}{2}(|0010\rangle+|0111\rangle+|1000\rangle+|1101\rangle) \quad \text{(Eşitlik 210)}$$

$|B_{10}\rangle = \frac{1}{2}(|0010\rangle + |0111\rangle - |1000\rangle - |1101\rangle)$ (Eşitlik 211)

$|B_{11}\rangle = \frac{1}{2}(|0010\rangle - |0111\rangle + |1000\rangle - |1101\rangle)$ (Eşitlik 212)

$|B_{12}\rangle = \frac{1}{2}(|0010\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle + |1101\rangle)$ (Eşitlik 213)

$|B_{13}\rangle = \frac{1}{2}(|0011\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1100\rangle)$ (Eşitlik 214)

$|B_{14}\rangle = \frac{1}{2}(|0011\rangle + |0110\rangle - |1001\rangle - |1100\rangle)$ (Eşitlik 215)

$|B_{15}\rangle = \frac{1}{2}(|0011\rangle - |0110\rangle + |1001\rangle - |1100\rangle)$ (Eşitlik 216)

$|B_{16}\rangle = \frac{1}{2}(|0011\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle + |1100\rangle)$ (Eşitlik 217)

şeklinde yazılır. Böylece protokol başarılı bir şekilde tamamlanmış olur.

3.3. Uygulama 2: Üç kübitlik bir durumun ışınlama protokolü

Şimdi de ışınlanmak istenen 3 kübitlik durumu belirleyelim. 3 kübitlik durumun muhtemel 8 adet konfigürasyonu vardır. Durum vektörüne |ψ⟩ diyelim.

$|\psi\rangle_{A_1A_2A_3} = (\alpha_1|000\rangle + \alpha_2|001\rangle + \alpha_3|010\rangle + \alpha_4|100\rangle + \alpha_5|011\rangle + \alpha_6|101\rangle + \alpha_7|110\rangle + \alpha_8|111\rangle)_{A_1A_2A_3}$ (Eşitlik 218)

Eşitlik(219)' da, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ ve α_8 kompleks sayılardır. $|\psi\rangle$ durumunun normalize olması gerektiği gerçeğinden dolayı

$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 = 1$ (Eşitlik 219)

olmalıdır. Alice ve Bob, daha önce bir araya geldiklerinde aralarında dolanık bir durumun üçer kübitini paylaşmaları gerekir. Bu dolanık duruma "Kuantum Kanal" veya "Bell durumu" denir. Aylin, ışınlamak istediği durumu, bu dolanık Bell durumu ile etkileştirir. Bu aşamada elde edilen durumun ilk 6 kübiti Alice'e, son 3 kübiti ise Bob'a aittir. Dolaşık altı kübitlik durum şu şekilde yazılır:

$|b\rangle_{A_4A_5A_6B_1B_2B_3} = \prod_{j=1}^{3} |\Phi^+\rangle_{AjBj} = \frac{1}{\sqrt{8}} \prod_{j=1}^{3} (|00\rangle_{AjBj} + |11\rangle_{AjBj})$ (Eşitlik 220)

Alice ve Bob, eşitlikte verilen durumun üç kübitini paylaşır. İlk üç kübit Alice' in ve son üçü ise Bob' undur. Eşitlik(221) açıkça şu şekilde yazılabilir:

$$|b\rangle_{A_4A_5A_6B_1B_2B_3} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(|000000\rangle + |001001\rangle + |010010\rangle + |100100\rangle + |011011\rangle + |101101\rangle + |110110\rangle + |111111\rangle\right)_{A_4A_5A_6B_1B_2B_3} \quad \text{(Eşitlik 221)}$$

Alice sadece kendi kübitlerine, Bob ise sadece kendi kübitlerine işlem yapabilirler. Çünkü birbirlerinden çok uzaktalar. Protokolün doğru bir şekilde işlemesi için bu dolanık Bell durumunun doğru belirlenmesi gerekir.

Protokolün doğru bir şekilde çalışması için, üçer kübitlerini paylaştıkları Bell durumuna ek olarak 63 tane başka Bell durumunun dolayısıyla toplam 64 doğru Bell durumlarının belirlenmesi gerekir.

N = 3 durumu için U = {Z1;Z2;Z3} ve V = {X1;X2;X3}; Zi ve Xi' nin i' nci duruma göre hareket ettiğini hatırlayalım.

U ve V' nin çalışması şekli sırasıyla sağdan sola ve soldan sağa şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P(U)} = \{\mathrm{I}, \mathrm{Z_1}, \mathrm{Z_2}, \mathrm{Z_3}, \mathrm{Z_1Z_2}, \mathrm{Z_1Z_3}, \mathrm{Z_2Z_3}, \mathrm{Z_1Z_2Z_3}\} \\ &\widetilde{\mathrm{P}}\mathrm{(V)} = \{\mathrm{I}, \mathrm{X_1}, \mathrm{X_2}, \mathrm{X_3}, \mathrm{X_2X_1}, \mathrm{X_3X_1}, \mathrm{X_3X_2}, \mathrm{X_3X_2X_1}\} \end{aligned} \quad \text{(Eşitlik 222)}$$

P(U) ve $\widetilde{P}$(V)'nin kartezyen çarpımı 8x8'lik bir matristir ve şu şekilde verilir,

$$P(U)x\tilde{P}(V) = \begin{pmatrix} I & X_1 & X_2 & X_3 & X_2X_1 & X_3X_1 & X_3X_2 & X_3X_2X_1 \\ Z_1 & Z_1X_1 & Z_1X_2 & Z_1X_3 & Z_1X_2X_1 & Z_1X_3X_1 & Z_1X_3X_2 & Z_1X_3X_2X_1 \\ Z_2 & Z_2X_1 & Z_2X_2 & Z_2X_3 & Z_2X_2X_1 & Z_2X_3X_1 & Z_2X_3X_2 & Z_2X_3X_2X_1 \\ Z_3 & Z_3X_1 & Z_3X_2 & Z_3X_3 & Z_3X_2X_1 & Z_3X_3X_1 & Z_3X_3X_2 & Z_3X_3X_2X_1 \\ Z_1Z_2 & Z_1Z_2X_1 & Z_1Z_2X_2 & Z_1Z_2X_3 & Z_1Z_2X_2X_1 & Z_1Z_2X_3X_1 & Z_1Z_2X_3X_2 & Z_1Z_2X_3X_2X_1 \\ Z_1Z_3 & Z_1Z_3X_1 & Z_1Z_3X_2 & Z_1Z_3X_3 & Z_1Z_3X_2X_1 & Z_1Z_3X_3X_1 & Z_1Z_3X_3X_2 & Z_1Z_3X_3X_2X_1 \\ Z_2Z_3 & Z_2Z_3X_1 & Z_2Z_3X_2 & Z_2Z_3X_3 & Z_2Z_3X_2X_1 & Z_2Z_3X_3X_1 & Z_2Z_3X_3X_2 & Z_2Z_3X_3X_2X_1 \\ Z_1Z_2Z_3 & Z_1Z_2Z_3X_1 & Z_1Z_2Z_3X_2 & Z_1Z_2Z_3X_3 & Z_1Z_2Z_3X_2X_1 & Z_1Z_2Z_3X_3X_1 & Z_1Z_2Z_3X_3X_2 & Z_1Z_2Z_3X_3X_2X_1 \end{pmatrix}$$

Denklemdeki matrisi, o matrisin sütunlarını ardışık olarak yazarak tek bir sütuna çevirebilir ve buna Q adını verebiliriz. Qj, Q' nun j. öğesiyse, |b⟩ üzerinde Qj uygulanarak 64 b durumu oluşturulabilir. Burada 1≤j≤64 “b durumları” dediğimiz bu durumlar aşağıda verilmiştir.

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle + |001001\rangle + |010010\rangle + |100100\rangle + |011011\rangle + |101101\rangle + |110110\rangle + |111111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 223)}$$

$$|b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle + |001001\rangle + |010010\rangle - |100100\rangle + |011011\rangle - |101101\rangle - |110110\rangle - |111111\rangle) \quad \text{(Eşitlik 224)}$$

$|b_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle+|001001\rangle-|010010\rangle+|100100\rangle-|011011\rangle+|101101\rangle-|110110\rangle-|111111\rangle)$ (Eşitlik 225)

$|b_4\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle-|001001\rangle+|010010\rangle+|100100\rangle-|011011\rangle-|101101\rangle+|110110\rangle-|111111\rangle)$ (Eşitlik 226)

$|b_5\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle+|001001\rangle-|010010\rangle-|100100\rangle-|011011\rangle-|101101\rangle+|110110\rangle+|111111\rangle)$ (Eşitlik 227)

$|b_6\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle-|001001\rangle+|010010\rangle-|100100\rangle-|011011\rangle+|101101\rangle-|110110\rangle+|111111\rangle)$ (Eşitlik 228)

$|b_7\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle-|001001\rangle-|010010\rangle+|100100\rangle+|011011\rangle-|101101\rangle-|110110\rangle+|111111\rangle)$ (Eşitlik 229)

$|b_8\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000000\rangle-|001001\rangle-|010010\rangle-|100100\rangle+|011011\rangle+|101101\rangle+|110110\rangle-|111111\rangle)$ (Eşitlik 230)

$|b_9\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle+|001000\rangle+|010011\rangle+|100101\rangle+|011010\rangle+|101100\rangle+|110111\rangle+|111110\rangle)$ (Eşitlik 231)

$|b_{10}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle+|001000\rangle+|010011\rangle-|100101\rangle+|011010\rangle-|101100\rangle-|110111\rangle-|111110\rangle)$ (Eşitlik 232)

$|b_{11}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle+|001000\rangle-|010011\rangle+|100101\rangle-|011010\rangle+|101100\rangle-|110111\rangle-|111110\rangle)$ (Eşitlik 233)

$|b_{12}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle-|001000\rangle+|010011\rangle+|100101\rangle-|011010\rangle-|101100\rangle+|110111\rangle-|111110\rangle)$ (Eşitlik 234)

$|b_{13}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle+|001000\rangle-|010011\rangle-|100101\rangle-|011010\rangle-|101100\rangle+|110111\rangle+|111110\rangle)$ (Eşitlik 235)

$|b_{14}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle-|001000\rangle+|010011\rangle-|100101\rangle-|011010\rangle+|101100\rangle-|110111\rangle+|111110\rangle)$ (Eşitlik 236)

$|b_{15}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle-|001000\rangle-|010011\rangle+|100101\rangle+|011010\rangle-|101100\rangle-|110111\rangle+|111110\rangle)$ (Eşitlik 237)

$|b_{16}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000001\rangle-|001000\rangle-|010011\rangle-|100101\rangle+|011010\rangle+|101100\rangle+|110111\rangle-|111110\rangle)$ (Eşitlik 238)

$|b_{17}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle+|001011\rangle+|010000\rangle+|100110\rangle+|011001\rangle+|101111\rangle+|110100\rangle+|111101\rangle)$ (Eşitlik 239)

$|b_{18}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle+|001011\rangle+|010000\rangle-|100110\rangle+|011001\rangle-|101111\rangle-|110100\rangle-|111101\rangle)$ (Eşitlik 240)

$|b_{19}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle+|001011\rangle-|010000\rangle+|100110\rangle-|011001\rangle+|101111\rangle-|110100\rangle-|111101\rangle)$ (Eşitlik 241)

$|b_{20}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle-|001011\rangle+|010000\rangle+|100110\rangle-|011001\rangle-|101111\rangle+|110100\rangle-|111101\rangle)$ (Eşitlik 242)

$|b_{21}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle+|001011\rangle-|010000\rangle-|100110\rangle-|011001\rangle-|101111\rangle+|110100\rangle+|111101\rangle)$ (Eşitlik 243)

$|b_{22}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle-|001011\rangle+|010000\rangle-|100110\rangle-|011001\rangle+|101111\rangle-|110100\rangle+|111101\rangle)$ (Eşitlik 244)

$|b_{23}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle-|001011\rangle-|010000\rangle+|100110\rangle+|011001\rangle-|101111\rangle-|110100\rangle+|111101\rangle)$ (Eşitlik 245)

$|b_{24}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000010\rangle-|001011\rangle-|010000\rangle-|100110\rangle+|011001\rangle+|101111\rangle+|110100\rangle-|111101\rangle)$ (Eşitlik 246)

$|b_{25}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle+|001101\rangle+|010110\rangle+|100000\rangle+|011111\rangle+|101001\rangle+|110010\rangle+|111011\rangle$ (Eşitlik 247)

$|b_{26}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle+|001101\rangle+|010110\rangle-|100000\rangle+|011111\rangle-|101001\rangle-|110010\rangle-|111011\rangle)$ (Eşitlik 248)

$|b_{27}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle+|001101\rangle-|010110\rangle+|100000\rangle-|011111\rangle+|101001\rangle-|110010\rangle-|111011\rangle)$ (Eşitlik 249)

$|b_{28}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle-|001101\rangle+|010110\rangle+|100000\rangle-|011111\rangle-|101001\rangle+|110010\rangle-|111011\rangle)$ (Eşitlik 250)

$|b_{29}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle+|001101\rangle-|010110\rangle-|100000\rangle-|011111\rangle-|101001\rangle+|110010\rangle+|111011\rangle)$ (Eşitlik 251)

$|b_{30}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle-|001101\rangle+|010110\rangle-|100000\rangle-|011111\rangle+|101001\rangle-|110010\rangle+|111011\rangle)$ (Eşitlik 252)

$|b_{31}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle-|001101\rangle-|010110\rangle+|100000\rangle+|011111\rangle-|101001\rangle-|110010\rangle+|111011\rangle)$ (Eşitlik 253)

$|b_{32}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000100\rangle-|001101\rangle-|010110\rangle-|100000\rangle+|011111\rangle+|101001\rangle+|110010\rangle-|111011\rangle)$ (Eşitlik 254)

$|b_{33}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle+|001010\rangle+|010001\rangle+|100111\rangle+|011000\rangle+|101110\rangle+|110101\rangle+|111100\rangle$ (Eşitlik 255)

$|b_{34}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle+|001010\rangle+|010001\rangle-|100111\rangle+|011000\rangle-|101110\rangle-|110101\rangle-|111100\rangle)$ (Eşitlik 256)

$|b_{35}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle+|001010\rangle-|010001\rangle+|100111\rangle-|011000\rangle+|101110\rangle-|110101\rangle-|111100\rangle)$ (Eşitlik 257)

$|b_{36}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle-|001010\rangle+|010001\rangle+|100111\rangle-|011000\rangle-|101110\rangle+|110101\rangle-|111100\rangle)$ (Eşitlik 258)

$|b_{37}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle+|001010\rangle-|010001\rangle-|100111\rangle-|011000\rangle-|101110\rangle+|110101\rangle+|111100\rangle)$ (Eşitlik 259)

$|b_{38}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle-|001010\rangle+|010001\rangle-|100111\rangle-|011000\rangle+|101110\rangle-|110101\rangle+|111100\rangle)$ (Eşitlik 260)

$|b_{39}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle-|001010\rangle-|010001\rangle+|100111\rangle+|011000\rangle-|101110\rangle-|110101\rangle+|111100\rangle)$ (Eşitlik 261)

$|b_{40}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000011\rangle-|001010\rangle-|010001\rangle-|100111\rangle+|011000\rangle+|101110\rangle+|110101\rangle-|111100\rangle)$ (Eşitlik 262)

$|b_{41}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle+|001100\rangle+|010111\rangle+|100001\rangle+|011110\rangle+|101000\rangle+|110011\rangle+|111010\rangle$ (Eşitlik 263)

$|b_{42}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle+|001100\rangle+|010111\rangle-|100001\rangle+|011110\rangle-|101000\rangle-|110011\rangle-|111010\rangle)$ (Eşitlik 264)

$|b_{43}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle+|001100\rangle-|010111\rangle+|100001\rangle-|011110\rangle+|101000\rangle-|110011\rangle-|111010\rangle)$ (Eşitlik 265)

$|b_{44}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle-|001100\rangle+|010111\rangle+|100001\rangle-|011110\rangle-|101000\rangle+|110011\rangle-|111010\rangle)$ (Eşitlik 266)

$|b_{45}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle+|001100\rangle-|010111\rangle-|100001\rangle-|011110\rangle-|101000\rangle+|110011\rangle+|111010\rangle)$ (Eşitlik 267)

$|b_{46}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle-|001100\rangle+|010111\rangle-|100001\rangle-|011110\rangle+|101000\rangle-|110011\rangle+|111010\rangle)$ (Eşitlik 268)

$|b_{47}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle-|001100\rangle-|010111\rangle+|100001\rangle+|011110\rangle-|101000\rangle-|110011\rangle+|111010\rangle)$ (Eşitlik 269)

$|b_{48}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000101\rangle-|001100\rangle-|010111\rangle-|100001\rangle+|011110\rangle+|101000\rangle+|110011\rangle-|111010\rangle)$ (Eşitlik 270)

$|b_{49}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle+|001111\rangle+|010100\rangle+|100010\rangle+|011101\rangle+|101011\rangle+|110000\rangle+|111001\rangle)$ (Eşitlik 271)

$|b_{50}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle+|001111\rangle+|010100\rangle-|100010\rangle+|011101\rangle-|101011\rangle-|110000\rangle-|111001\rangle)$ (Eşitlik 272)

$|b_{51}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle+|001111\rangle-|010100\rangle+|100010\rangle-|011101\rangle+|101011\rangle-|110000\rangle-|111001\rangle)$ (Eşitlik 273)

$|b_{52}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle-|001111\rangle+|010100\rangle+|100010\rangle-|011101\rangle-|101011\rangle+|110000\rangle-|111001\rangle)$ (Eşitlik 274)

$|b_{53}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle+|001111\rangle-|010100\rangle-|100010\rangle-|011101\rangle-|101011\rangle+|110000\rangle+|111001\rangle)$ (Eşitlik 275)

$|b_{54}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle-|001111\rangle+|010100\rangle-|100010\rangle-|011101\rangle+|101011\rangle-|110000\rangle+|111001\rangle)$ (Eşitlik 276)

$|b_{55}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle-|001111\rangle-|010100\rangle+|100010\rangle+|011101\rangle-|101011\rangle-|110000\rangle+|111001\rangle)$ (Eşitlik 277)

$|b_{56}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000110\rangle-|001111\rangle-|010100\rangle-|100010\rangle+|011101\rangle+|101011\rangle+|110000\rangle-|111001\rangle)$ (Eşitlik 278)

$|b_{57}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle+|001110\rangle+|010101\rangle+|100011\rangle+|011100\rangle+|101010\rangle+|110001\rangle+|111000\rangle)$ (Eşitlik 279)

$|b_{58}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle+|001110\rangle+|010101\rangle-|100011\rangle+|011100\rangle-|101010\rangle-|110001\rangle-|111000\rangle)$ (Eşitlik 280)

$|b_{59}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle+|001110\rangle-|010101\rangle+|100011\rangle-|011100\rangle+|101010\rangle-|110001\rangle-|111000\rangle)$ (Eşitlik 281)

$|b_{60}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle-|001110\rangle+|010101\rangle+|100011\rangle-|011100\rangle-|101010\rangle+|110001\rangle-|111000\rangle)$ (Eşitlik 282)

$|b_{61}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle+|001110\rangle-|010101\rangle-|100011\rangle-|011100\rangle-|101010\rangle+|110001\rangle+|111000\rangle)$ (Eşitlik 283)

$|b_{62}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle-|001110\rangle+|010101\rangle-|100011\rangle-|011100\rangle+|101010\rangle-|110001\rangle+|111000\rangle)$ (Eşitlik 284)

$|b_{63}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle-|001110\rangle-|010101\rangle+|100011\rangle+|011100\rangle-|101010\rangle-|110001\rangle+|111000\rangle)$ (Eşitlik 285)

$|b_{64}\rangle=\frac{1}{\sqrt{8}}(|000111\rangle-|001110\rangle-|010101\rangle-|100011\rangle+|011100\rangle+|101010\rangle+|110001\rangle-|111000\rangle)$ (Eşitlik 286)

Alice, ışınlanmak istediği durumla payındaki kübit ile etkileşime girdikten sonra aşağıdaki ortak durum elde edilir.

$$|\Phi\rangle_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3} = |\psi\rangle_{A_1A_2A_3} \otimes |b\rangle_{A_4A_5A_6B_1B_2B_3}$$ (Eşitlik 287)

(224) ile (287) eşitliklerini (289) eşitliği şeklinde yazabiliriz.

$$+\frac{\alpha_1}{\sqrt{8}}\{|000000000\rangle+|000001001\rangle+|000010010\rangle+|000100100\rangle+|000011011\rangle+ |000101101\rangle+|000110110\rangle+|000111111\rangle\}+\frac{\alpha_2}{\sqrt{8}}\{|001000000\rangle+|001001001\rangle+ |001010010\rangle+|001100100\rangle+|001011011\rangle+|001101101\rangle+|001110110\rangle+$$ (Eşitlik 288)

$|001111111\rangle\} + \frac{\alpha_3}{\sqrt{8}}\{|010000000\rangle + |010001001\rangle + |010010010\rangle + |010100100\rangle +$

$|010011011\rangle + |010101101\rangle + |010110110\rangle + |010111111\rangle\} + \frac{\alpha_4}{\sqrt{8}}\{|100000000\rangle +$

$|100001001\rangle + |100010010\rangle + |100100100\rangle + |100011011\rangle + |100101101\rangle +$

$|100110110\rangle + |100111111\rangle\} + \frac{\alpha_5}{\sqrt{8}}\{|011000000\rangle + |011001001\rangle + |011010010\rangle +$

$|011100100\rangle + |011011011\rangle + |011101101\rangle + |011110110\rangle + |011111111\rangle\} +$

$\frac{\alpha_6}{\sqrt{8}}\{|101000000\rangle + |101001001\rangle + |101010010\rangle + |101100100\rangle + |101011011\rangle +$

$|101101101\rangle + |101110110\rangle + |101111111\rangle\} + \frac{\alpha_7}{\sqrt{8}}\{|110000000\rangle + |110001001\rangle +$

$|110010010\rangle + |110100100\rangle + |110011011\rangle + |110101101\rangle + |110110110\rangle +$

$|110111111\rangle\} + \frac{\alpha_8}{\sqrt{8}}\{|111000000\rangle + |111001001\rangle + |111010010\rangle + |111100100\rangle +$

$|111011011\rangle + |111101101\rangle + |111110110 + |111111111\rangle\}$

$$|\Phi\rangle_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{64} |b_j\rangle_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} \otimes |\psi_j\rangle_{B_1B_2B_3} \qquad \text{(Eşitlik 289)}$$

Burada eşitlik(290)’da $|\psi_j\rangle$ durumları uygun üniter tek kübit kapılar uygulanarak 64 kez yeniden düzenlenmelidir.

Bu tek kübit kapılar, kartezyen alınarak elde edilebilir.

Aşağıda verildiği gibi bir 8x8 matrisi ola*n* $\tilde{P}$(V) ve P(U)' nun çarpımı

$$\widetilde{P(V)} x P(U) = \begin{pmatrix} I & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_1Z_2 & Z_1Z_3 & Z_2Z_3 & Z_1Z_2Z_3 \\ X_1 & X_1Z_1 & X_1Z_2 & X_1Z_3 & X_1Z_1Z_2 & X_1Z_1Z_3 & X_1Z_2Z_3 & X_1Z_1Z_2Z_3 \\ X_2 & X_2Z_1 & X_2Z_2 & X_2Z_3 & X_2Z_1Z_2 & X_2Z_1Z_3 & X_2Z_2Z_3 & X_2Z_1Z_2Z_3 \\ X_3 & X_3Z_1 & X_3Z_2 & X_3Z_3 & X_3Z_1Z_2 & X_3Z_1Z_3 & X_3Z_2Z_3 & X_3Z_1Z_2Z_3 \\ X_2X_1 & X_2X_1\,Z_1 & X_2X_1Z_2 & X_2X_1Z_3 & X_2X_1Z_1Z_2 & X_2X_1Z_1Z_3 & X_2X_1Z_2Z_3 & X_2X_1Z_1Z_2Z_3 \\ X_3X_1 & X_3X_1Z_1 & X_3X_1Z_2 & X_3X_1Z_3 & X_3X_1Z_1Z_2 & X_3X_1Z_1Z_3 & X_3X_1Z_2Z_3 & X_3X_1Z_1Z_2Z_3 \\ X_3X_2 & X_3X_2Z_1 & X_3X_2Z_2 & X_3X_2Z_3 & X_3X_2Z_1Z_2 & X_3X_2Z_1Z_3 & X_3X_2Z_2Z_3 & X_3X_2Z_1Z_2Z_3 \\ X_3X_2X_1 & X_3X_2X_1Z_1 & X_3X_2X_1Z_2 & X_3X_2X_1Z_3 & X_3X_2X_1Z_1Z_2 & X_3X_2X_1Z_1Z_3 & X_3X_2X_1Z_2Z_3 & X_3X_2X_1Z_1Z_2Z_3 \end{pmatrix}$$

gibidir. Denklemdeki bu matris, satırları ardışık olarak yazılarak tek bir sütuna dönüştürülebilir ve buna W denilebilir. Eğer Wj, W' nin j. elemanı ise, o zaman $|\psi_j\rangle$ durumları, her seferinde ψ_j uygulanarak 64 kez yeniden düzenlenebilir (1≤j≤64).

Alice ışınlamak istediği üç kübit artı Bob ile paylaşılan b durumlarından üç kübitte ortak bir ölçüm yapar. Ardından, klasik bir iletişim kanalı kullanarak, Bob' a hangi durumu ölçtüğünü bildirmek için altı bitlik klasik bilgi gönderir. Bu klasik bilgiyle Bob, orijinal durumu kurtarmak için üç kübitine uygun üniter işlemleri uygular. Üniter işlemleri uyguladıktan sonra, ışınlanma protokolü keyfi bir üç kübitlik durum için başarıyla tamamlanmış olur. Bob' un kübitlerine uygulaması gereken üniter işlemler aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\widetilde{P}(U) = \{I, Z_1, Z_2, Z_3, Z_2Z_1, Z_3Z_1, Z_3Z_2, Z_3Z_2Z_1\} \qquad \text{(Eşitlik 290)}$$

$$P(V) = \{I, X_1, X_2, X_3, X_2X_1, X_3X_1, X_3X_2, X_3X_2X_1\}$$

Denklem(289)' da $\widetilde{P}(U)$ ve P(V)'nin kartezyen çarpımı 8x8' lik bir matristir ve şu şekilde verilir:

$$\widetilde{P}(U)xP(V) = \begin{pmatrix} I & X_1 & X_2 & X_3 & X_1X_2 & X_1X_3 & X_2X_3 & X_1X_2X_3 \\ Z_1 & Z_1X_1 & Z_1X_2 & Z_1X_3 & Z_1X_1X_2 & Z_1X_1X_3 & Z_1X_2X_3 & Z_1X_1X_2X_3 \\ Z_2 & Z_2X_1 & Z_2X_2 & Z_2X_3 & Z_2X_1X_2 & Z_2X_1X_3 & Z_2X_2X_3 & Z_2X_1X_2X_3 \\ Z_3 & Z_3X_1 & Z_3X_2 & Z_3X_3 & Z_3X_1X_2 & Z_3X_1X_3 & Z_3X_2X_3 & Z_3X_1X_2X_3 \\ Z_2Z_1 & Z_2Z_1X_1 & Z_2Z_1X_2 & Z_2Z_1X_3 & Z_2Z_1X_1X_2 & Z_2Z_1X_1X_3 & Z_2Z_1X_2X_3 & Z_2Z_1X_1X_2X_3 \\ Z_3Z_1 & Z_3Z_1X_1 & Z_3Z_1X_2 & Z_3Z_1X_3 & Z_3Z_1X_1X_2 & Z_3Z_1X_1X_3 & Z_3Z_1X_2X_3 & Z_3Z_1X_1X_2X_3 \\ Z_3Z_2 & Z_3Z_2X_1 & Z_3Z_2X_2 & Z_3Z_2X_3 & Z_3Z_2X_1X_2 & Z_3Z_2X_1X_3 & Z_3Z_2X_2X_3 & Z_3Z_2X_1X_2X_3 \\ Z_3Z_2Z_1 & Z_3Z_2Z_1X_1 & Z_3Z_2Z_1X_2 & Z_3Z_2Z_1X_3 & Z_3Z_2Z_1X_1X_2 & Z_3Z_2Z_1X_1X_3 & Z_3Z_2Z_1X_2X_3 & Z_3Z_2Z_1X_1X_2X_3 \end{pmatrix}$$

Matrisi sütunlarını yazarak tek bir sütuna çevirebiliriz ve R olarak adlandırırız.

Eğer Rj o sütunun j. elemanıysa, altı bit aldıktan sonra Alice' ten gelen klasik bilgilerden yola çıkarak, Bob kübitlerine Rj uygular ve orijinali geri alır. Böylece protokol başarılı bir şekilde sona erer. Sonuç N kübitlik bir durumun ışınlama protokolünün geliştirilmesine genelleştirilir.

4. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu tez içerisinde kuantum mekaniğine genel bir bakış, kuantum dolanıklılık ve kuantum ışınlama protokolleri hakkında bilgi verilmiştir. Kuantum Işınlama, kuantum mekaniğinin doğasında olan kuantum dolanıklılığın belki de en ilginç olaylarından birisidir. Projede N kübitlik bir kuantum durumunun bir yerden başka bir yere ışınlama protokolünün oluşturulması amaçlanmaktadır.

N kübitlik bir kuantum durumunun ışınlama protokolünde yapılacak işlemler adımlarıyla aşağıda özet olarak verilmiştir.

1. Işınlanmak istenen durumun belirlenmesi (3 kübitlik genel durum)
2. Bu durumun, üretilecek olan 64 Bell durumlarından herhangi biri ile etkileşimi sonucu elde edilecek durumun tespiti (bu durum $|\phi\rangle$ olsun)
3. Bu $|\phi\rangle$ durumunun ilk 6 kübitinin üretilen 64 tane Bell durumu cinsinden ifade edilmesi.
4. Alice'in Bell durum ölçümü sonucunda elde ettiği 6 bitlik klasik bilginin Bob' a gönderilmesi.
5. Bob' un elde ettiği bu klasik bilgiye göre, ışınlanmak istenen durumu yeniden inşa edebilmesi için kendi kübitlerini hangi lojik kapılarından geçirmesi gerektiğinin belirlenmesi.
6. Protokolün tamamlanması.
7. Sonucun N kübitlik durumun ışınlama protokolüne genelleştirilmesi.

Bu tezde çalışılacak konu her ne kadar teorik olsa da, kuantum ışınlama olayının, kuantum bilgisayar teknolojisinin gelişmesinde çok önemli bir rolü vardır. Dolayısıyla uzun vadede yapılan çalışmanın, kuantum bilgisayar teknolojisini gelişmesine önemli katkılarda bulunacağına inanılmaktadır

Kuantum bilgisayarların geliştirilmesi ve hesaplamalarda kullanılması için tüm dünyada çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Bilginin kuantum bilgisayarlarca işlenme sürecinde kuantum dolanıklılık ve onun ilginç bir sonucu olan kuantum ışınlama çok önemli bir rol almaktadır. Bu tezde önerilen ışınlama yönteminin geliştirilmesi, bu alana katkı sağlayacaktır. Bu çalışmada üretilecek bilgi ve deneyim daha sonra yapılacak çalışmalara zemin hazırlayacaktır

Kuantum hesaplama ve kuantum bilgi, dünyada olduğu gibi ülkemizde de yeni yeni çalışılan bir alandır. Bu alanda yetişmiş insan kaynağı, hem teknolojik, ekonomik, hem de akademik olarak bir birikim oluşturma noktasında son derece önemli katkılar sunacaktır. Bu tezde geliştirilecek kuantum ışınlama protokolü ile elde edilen bilgi birikimi ve deneyim, yapılacak yayınlar ile bu alanda yetişecek akademik insan kaynağına aktarılacak ve akademik insan yetiştirme gücüne katkıda bulunacaktır. Ayrıca bu çalışmada elde edilecek bilgi ve deneyim kuantum bilgi ve kuantum hesaplamanın diğer alanlarının da çalışılması için kullanılacaktır.

Kauntum bilgisayarlar bilindiği gibi güvenli haberleşme alanında da çok önemli sonuçlar vaat etmektedir. "Quantum cryptograpy" bu anlamda önemli çalışma alanlarında birisidir. Kuantum ışınlama olayında elde edilecek bilgi ve deneyim, kuantum hesaplamanın diğer alanlarının gelişmesine de katkı sunacaktır.

KAYNAKÇA

Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., ve Wootters, W. K. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13), 1895.

Bouwmeester, D., Pan, J. W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., ve Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660), 575-579.

Chen, P. X., Zhu, S. Y., ve Guo, G. C. (2006). General form of genuine multipartite entanglement quantum channels for teleportation. *Physical Review A*, 74(3), 032324.

Einstein, A., Podolsky, B., ve Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10), 777.

Karaoğlu, B. (2008). *Kuantum Mekaniğine Giriş* (ss. 99-102). Seçkin Yayıncılık.

Lee, J., Min, H., ve Oh, S. D. (2002). Multipartite entanglement for entanglement teleportation. *Physical Review A*, 66(5), 052318.

Li, D. F., Wang, R. J., ve Baagyere, E. (2019). Quantum teleportation of an arbitrary two-qubit state by using two three-qubit GHZ states and the six-qubit entangled state. *Quantum Information Processing*, 18(5), 1-15.

Li, Y. H., Li, X. L., Nie, L. P., ve Sang, M. H. (2016). Quantum teleportation of three and four-qubit state using multi-qubit cluster states. *International Journal of Theoretical Physics*, 55(3), 1820-1823.

Liu, Y. L., Man, Z. X., ve Xia, Y. J. (2007). Quantum teleportation of an arbitrary N-qubit state via non-maximally entangled state. *International Journal of Quantum Information*, 5(05), 673-683.

Liu, Z. M., ve Zhou, L. (2014). Quantum teleportation of a three-qubit state using a five-qubit cluster state. *International Journal of Theoretical Physics*, 53(12), 4079-4082.

Man, Z. X., Xia, Y. J., ve An, N. B. (2007). Quantum teleportation of an unknown N-Qubit W-Like state. *JETP Letters*, 85(12), 662-666.

Nielsen, D., ve Chuang, S. L. (2010). Four-wave mixing and wavelength conversion in quantum dots. *Physical Review B*, 81(3), 035305.

Pathak, A., ve Banerjee, A. (2011). Efficient quantum circuits for perfect and controlled teleportation of n-qubit non-maximally entangled states of generalized Bell-type. *International Journal of Quantum Information*, 9(supp01), 389-403.

Rigolin, G. (2005). Quantum teleportation of an arbitrary two-qubit state and its relation to multipartite entanglement. *Physical Review A*, 71(3), 032303.

Saha, D., ve Panigrahi, P. K. (2012). N-qubit quantum teleportation, information splitting and superdense coding through the composite GHZ–Bell channel. *Quantum Information Processing*, 11(2), 615-628.

Wei-Xing, J., Jian-Xing, F., Shi-Qun, Z., ve Jin-Qiao, S. (2007). Controlled teleportation of an unknown n-qubit entangled GHZ state. *Communications in Theoretical Physics*, 47(6), 1045.

Wen-Xue, Z., Jun, G., Guang-Ling, C., ve Ai-Xi, C. (2010). Teleportation of n-qubit W state without bell-state measurement via selective resonant interaction in cavity QED. *Communications in Theoretical Physics*, 54(2), 253.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İlköğretim ve ortaöğretimini Aydın'da tamamladı. 2003 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fizik bölümünden mezun oldu. Daha sonra Pamukkale Üniversitesin' de tezsiz yüksek lisansını tamamladı. 2004 yılından itibaren çeşitli özel okul ve kurslarda Fizik Öğretmeni olarak çalıştı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi'nde tezli yüksek lisans yaparak 2022 yılında mezun oldu.